Доклады Академии наук СССР
1971. Том 197, № 2

УДК 517.946 *МАТЕМАТИКА*

И. М. КОЛОДИЙ

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

(*Представлено академиком И. Г. Петровским 30 IX 1970*)

В работе устанавливаются свойства ограниченности и непрерывности обобщенных решений некоторого класса вырождающихся квазилинейных эллиптических уравнений, а также доказываются неравенство Харнака, теорема Лиувилля и теорема об устранимой особенности, аналогичные соответствующим теоремам для гармонических функций. По результатам и методам настоящая статья примыкает к работам ([1-5]).

Пусть Ω — ограниченная область в n-мерном эвклидовом пространстве E_n, $x=(x_1,\ldots,x_n)$; $\bar\lambda\equiv(\lambda_1(x),\ldots,\lambda_n(x))$, $\lambda_i(x)$ — неотрицательные измеримые функции на Ω. Для шаров $\{x\colon |x|<r\}$, $\{x\colon |x-x_0|<r\}$ введем обозначения K_r, $K_r(x_0)$ соответственно.

Обозначим через $W_\beta^1(\bar\lambda,\Omega)$ подмножество функций из $W_1^1(\Omega)$, для которых конечна величина

$$\|U\|_{W_\beta^1(\bar\lambda,\Omega)}\equiv\sum_{i=1}^n\Big(\int_\Omega\lambda_i(x)\,|U_{x_i}|^\beta dx\Big)^{1/\beta}+\int_\Omega|U|\,dx,\quad \beta\geqslant 1.$$

Через $\mathring{W}_\beta^1(\bar\lambda,\Omega)$ обозначим подмножество функций из $\mathring{W}_1^1(\Omega)$, для которых конечна величина

$$\|U\|_{\mathring{W}_\beta^1(\bar\lambda,\Omega)}\equiv\sum_{i=1}^n\Big(\int_\Omega\lambda_i(x)\,|U_{x_i}|^\beta dx\Big)^{1/\beta},\quad \beta\geqslant 1.$$

Предположим, что $\lambda_i^{-1}(x)\in L_{t_i}(\Omega)$, $t_i\geqslant 1$, $t_i(\beta-1)\geqslant 1$. Тогда $\mathring{W}_\beta^1(\bar\lambda,\Omega)$ и $W_\beta^1(\bar\lambda,\Omega)$ — полные нормированные пространства.

Лемма 1. *Пусть $\lambda_i(x)\geqslant 0$, $\lambda_i^{-1}(x)\in L_{t_i}(K_r)$, $t_i\geqslant 1$, а числа β, t_i удовлетворяют неравенствам*

$$n+\sum_{i=1}^n\frac{1}{t_i}>\beta>1,\quad t_i(\beta-1)\geqslant 1.$$

Тогда для $U(x)\in W_\beta^1(\bar\lambda,\Omega)$ справедлива оценка

$$\Big(r^{-n}\int_{K_r}|U|^{k\beta}dx\Big)^{1/k}\leqslant C\Big[\sum_{i=1}^n\Big(r^{-n}\int_{K_r}\lambda_i^{-t_i}dx\Big)^{1/t_i}\sum_{i=1}^n r^{-n+\beta}\int_{K_r}\lambda_i\,|U_{x_i}|^\beta dx+$$
$$+\Big(r^{-n}\int_{K_r}|U|\,dx\Big)^\beta\Big],$$

где

$$k\leqslant n\Big(n-\beta+\sum_{i=1}^n\frac{1}{t_i}\Big)^{-1},\ C=C(n,t_i,\beta).$$

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{div}A(x,U,U_x)=B(x,U,U_x)\tag{1}$$

в области Ω. Предположим, что функции $A(x, U, p) = (A_1(x, U, p), \ldots, A_n(x, U, p))$, $B(x, U, p)$, где $p = (p_1, \ldots, p_n)$, определены для всех значений U, p и $x \in \Omega$, причем $A(x, U, U_x)$, $B(x, U, U_x)$ измеримы при любой функции $U(x) \in W_1^1(\Omega)$. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что выполняются следующие условия: для любых U, p и $x \in \Omega$

$$A(x, U, p)\cdot p \geqslant a_1 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x)\,|p_i|^\beta - g(x)\,|U|^\beta - d(x),$$

$$|A_i(x, U, p)| \leqslant a_2 \lambda_i(x)\,|p_i|^{\beta-1} + b(x)\,|U|^{\beta-1} + e(x),$$

$$|B(x, U, p)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\,|p_i|^{\beta-1} + \omega(x)\,|U|^{\beta-1} + f(x),$$

где a_1, a_2 — положительные константы; $d(x), g(x), b(x), e(x), c_i(x), \omega(x), f(x)$ — неотрицательные функции; $\lambda_i(x) \geqslant 0$, $\lambda_i^{-1}(x) \in L_{t_i}(\Omega)$, $t_i \geqslant 1$; $\lambda_i(x), d(x), g(x), b^{\beta/(\beta-1)}(x)/\lambda_i^{1/(\beta-1)}(x), e^{\beta/(\beta-1)}(x)/\lambda_i^{1/(\beta-1)}(x), c_i^\beta(x)/\lambda_i^{\beta-1}(x), \omega(x), f(x)$ принадлежат $L_s(\Omega)$, $s \geqslant 1$, причем числа β, t_i, s удовлетворяют неравенствам

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i} < \frac{\beta}{n}, \quad n + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i} > \beta > 1, \quad t_i(\beta - 1) \geqslant 1.$$

Определение 1. Функция $U(x) \in W_\beta^1(\lambda, \Omega)$ называется обобщенным решением уравнения (1), если для любой $\varphi(x) \in \mathring{W}_\beta^1(\lambda, \Omega)$ справедливо интегральное тождество

$$\int_\Omega [\varphi_x A(x, U, U_x) + \varphi B(x, U, U_x)]\, dx = 0.$$

Если в определении 1 $U(x) \in \mathring{W}_\beta^1(\lambda, \Omega)$, то $U(x)$ называется обобщенным решением однородной краевой задачи.

Введем обозначения:

$$Q(r, x_0) \equiv \sum_{i=1}^{n}\Big(r^{-n}\int_{K_r(x_0)} \lambda_i^s(x)\, dx\Big)^{1/s} \sum_{i=1}^{n}\Big(r^{-n}\int_{K_r(x_0)} \lambda_i^{-t_i}(x)\, dx\Big)^{1/t_i};$$

$$Q(r) \equiv Q(r, 0).$$

Теорема 1. *Пусть $U(x)$ — обобщенное решение уравнения* (1) *в шаре $K_{2r} \subset \Omega$ (всюду в настоящей работе предполагается, что r достаточно мало).*

Тогда

$$\operatorname*{vrai\,max}_{K_r} |U|^\beta \leqslant C\,[Q(2r) + 1]^{m/(m-1)}\Big[\Big(r^{-n}\int_{K_{2r}} |u|^{s'\beta} dx\Big)^{1/s'} + 1\Big],$$

$$s' = \frac{s}{s-1},\ m = \frac{k}{s'} > 1,\ k \leqslant n\Big(n - \beta + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i}\Big)^{-1},\ C = C(a_1, a_2, n, \beta, t_i, s).$$

Теорема 2. *Пусть $U(x)$ — обобщенное решение однородной краевой задачи для уравнения* (1) *в Ω и*

$$\Big(\int_\Omega\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i^\beta(x)}{\lambda_i^{\beta-1}(x)} + g(x) + \omega(x)\Big)^s dx\Big)^{1/s} < \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ достаточно мало.

Тогда

$$\operatorname*{vrai\,max}_{\Omega} |U| \leqslant C,$$

где константа C зависит от a_1, n, β, t_i, s, норм функций $\lambda_i(x)$, $c_i^\beta(x)/\lambda_i^{\beta-1}(x)$, $g(x)$, $d(x)$, $\omega(x)$, $f(x)$ в $L_s(\Omega)$ и норм $\lambda_i^{-1}(x)$ в $L_{t_i}(\Omega)$.

Теорема 3. *Пусть $U(x)$ — неотрицательное обобщенное решение уравнения* (1) *в шаре $K_{8r} \subset \Omega$. Пусть $Q(h, x_0) \leqslant \varkappa = \mathrm{const}$ для любой* *точки* $x_0 \in K_{4r}$ *и* $0 < h \leqslant 8r$. *Тогда в шаре* K_r

$$\underset{K_r}{\operatorname{vrai\,max}}\, U(x) \leqslant C\,(\underset{K_r}{\operatorname{vrai\,min}}\, U(x) + r^{1/\kappa\gamma}),$$

где $\gamma = \frac{n}{4\beta}\left(\frac{\beta}{n} - \frac{1}{s} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i}\right) > 0, \quad C = C(n, \beta, t_i, s, a_1, a_2, \varkappa).$

Теорема 4. *Пусть* $U(x)$ — *обобщенное решение уравнения* (1) *в шаре* $K_{2r} \subset \Omega$, $2r \leqslant r_0$, *причем* $\operatorname{vrai\,max}|U| = M_0 < \infty$. *Предположим, что* $Q(\rho) \leqslant \varkappa_1 = \mathrm{const}$ *при* $\rho \in (0, r_0]$.

Тогда существует такое $\alpha \in (0, 1)$, $\alpha = \alpha(n, \beta, t_i, s, \varkappa_1, M_0)$, *что при* $\rho \in (0, r_0]$ *справедлива оценка*

$$\operatorname{osc}(U, K_\rho) \leqslant C(1 + r_0)(\rho / r_0)^\alpha, \quad C = C(n, \beta, t_i, s, \varkappa_1, M_0),$$

т. е. $U(x)$ *удовлетворяет условию Гёльдера в начале координат.*

Теорема 5. *Пусть* $U(x)$ — *обобщенное решение уравнения* (1) *во всем пространстве, т. е. интегральное тождество выполняется в любом шаре* K_r. *Пусть*

1) $\frac{\beta}{n} - \frac{1}{s} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i} = 0,$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{E_n}\left(\frac{c_i^\beta(x)}{\lambda_i^{\beta-1}(x)}\right)^s dx\right)^{1/s}\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{E_n}\lambda_i^{-t_i}(x)\,dx\right)^{1/t_i} < \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ *достаточно мало*;

2) $g(x) = d(x) = b(x) = e(x) = \omega(x) = f(x) = 0$;

3) $\overline{\lim\limits_{\rho\to\infty}}\, Q(\rho) = \varkappa_2 = \mathrm{const} < \infty$.

Тогда существует такое $\alpha_0 = \alpha_0(n, s, t_i, \beta, \varkappa_2)$, *что из условия* $\underset{K_r}{\operatorname{vrai\,max}}\,|U| \geqslant Cr^\alpha$ *при* $r \geqslant R_0$ *и* $\alpha < \alpha_0$, *следует, что* $U(x) = \mathrm{const}$.

Определение 2. Пусть $\mathcal{D}$ — компактное множество в Ω. $(\alpha, \bar{\lambda})$-емкостью множества $\mathcal{D}$ называется число

$$\inf\int_\Omega \sum \lambda_i\,|\psi_{x_i}|^\alpha\,dx, \quad 1 \leqslant \alpha < \infty,$$

где inf берется по всем непрерывно дифференцируемым финитным в Ω функциям, которые не меньше единицы на $\mathcal{D}$.

Теорема 6. *Пусть* $1 < \beta \leqslant \alpha \leqslant n(1 + \max\limits_{=1,\ldots,n} T_i^{-1}) \equiv \alpha^*$, *где* T_i — *верхняя грань таких чисел* t_i, *что* $\lambda_i^{-1}(x) \in L_{t_i}(\Omega)$. *Если* $(\alpha, \bar{\lambda})$-*емкость компактного множества* $\mathcal{D}$ *равна нулю и для некоторого* $\delta > 0$ *обобщенное решение* $U(x)$ *уравнения* (1) *в* $K_{2r} \setminus \mathcal{D}$ *принадлежит пространству* $L_{\mu(1+\delta)}(K_{2r} \setminus \mathcal{D})$, $\mu = (\beta - 1)(1 - 1/s)^{-1}(1 - \beta/\alpha)^{-1}$, *то* $U(x)$ *является обобщенным решением уравнения* (1) *в шаре* K_r.

Замечание 1. Ограничение сверху на числа α и β связано с двумя обстоятельствами: 1) при $\alpha > \alpha^*$ в Ω не существует подмножеств нулевой $(\alpha, \bar{\lambda})$-емкости; 2) можно указать уравнение рассматриваемого в настоящей работе вида такое, что при β, больших соответствующего числа α^*, это уравнение имеет ограниченное решение с неустранимой одноточечной особенностью.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю С. Н. Кружкову за постановку задачи, постоянную помощь в работе, полезные советы и замечания.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
18 IX 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Moser, Comm. Pure Appl. Math., 13, № 3, 457 (1960). [2] J. Moser, ibid., 14, № 3, 577 (1961). [3] С. Н. Кружков, Матем. сборн., 65 (107), № 4, 522 (1964). [4] С. Н. Кружков, Матем. сборн., 77 (119), № 3, 299 (1968). [5] J. Serrin, Acta Math., 111, № 3—4, 247 (1964).