Доклады Академии наук СССР
1971. Том 197, № 2

УДК 517.91

МАТЕМАТИКА

В. Н. ЛАГУНОВ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ИГР ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

(Представлено академиком Н. Н. Красовским 20 VIII 1970)

Устанавливается наличие сходства между играми преследования $\tilde{\Gamma}$ при простом движении точечных объектов в n-мерном эвклидовом пространстве E^n, $n \geqslant 2$, и радиусе захвата $l \geqslant 0$ и аналогичными играми Γ для некоторых классов

$$\{W_i, \varphi_i\}, \quad i = 1, 2, \tag{1}$$

допустимых движений объектов (при $i=1$ преследующего, при $i=2$ преследуемого) в предположении, что начальное расстояние между объектами и l достаточно велико. Классы (1), описываемые ниже, содержат в себе движения объектов с трением, рассмотренные в контрольном примере ([1]) (причем в нелинейном случае ([7])), а также движения с постоянной по норме скоростью по траекториям ограниченной кривизны ([4–8]).

Рассматривается плата абсолютная — время поимки $\tilde{T}$ (соответственно T) для игры $\tilde{\Gamma}(\Gamma)$ и относительная

$$\tilde{P} = \tilde{T}/\tilde{T}_0, \quad \tilde{T}_0 > 0 \quad (P = T/T_0, \quad T_0 > 0), \tag{2}$$

где $\tilde{T}_0$, T — некоторые величины. Соответственно двум видам платы рассматривается два вида значения (цены) игры: абсолютное и относительное. Предполагается наличие полной информации, поведение противника в будущем не считается известным.

Приведем в нужной нам форме известные факты для игр $\tilde{\Gamma}$. Простое движение i-го объекта описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{r}_i(t) = u_i(t), \; t \geqslant 0, \; |u_i| = \tilde{v}_i = \text{const}, \tag{3}$$

где r_i — радиус-вектор объекта относительно некоторой координатной системы в E^n, а u_i — управление, являющееся измеримой вектор-функцией. Определим соотношением

$$\tilde{f}_i^*: \; u_i = \tilde{v}_i e, \; i = 1, 2, \tag{4}$$

где

$$e|r| = r, \quad r \neq 0, \quad r = r_2 - r_1, \tag{5}$$

стратегию i-го объекта. Из (5) получаем:

$$\frac{d}{dt}|r| = (\dot{r}_2, e) - (\dot{r}_1, e). \tag{6}$$

Теорема $\tilde{\text{А}}$. *Для существования преследующей стратегии при любом $l \geqslant 0$ и любых начальных условиях необходимо и достаточно выполнения неравенства*

$$\tilde{v}_1 > \tilde{v}_2. \tag{7}$$

Теорема $\tilde{\text{Б}}$. *Пусть выполнено неравенство* (7). *Тогда при любом $l \geqslant 0$ и любых начальных условиях стратегии* (4) *образуют седловую* *пару, а величины*

$$\tilde{T}_0 = (|r(0)| - l) / (\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2), \quad 1 \tag{8}$$

являются соответственно абсолютным и относительным значением игры (*см.* (2)).

Определим класс (1). Пусть $W_i \subset \mathbf{E}^n$ — замкнутое выпуклое ограниченное тело, перемещающееся в $\mathbf{E}^n$ как жесткое тело способом, описываемым ниже. Пусть далее W_i' — некоторое фиксированное положение вышеупомянутого тела. Тогда существует такая прямая L_i', что группа ортогональных преобразований $\mathbf{E}^n$, оставляющих неподвижными точки L_i', переводит W_i' в себя. Предполагается, что существует точка тела W_i', не принадлежащая L_i', и что L_i' — ориентированная прямая. Длину естественным образом ориентированного отрезка $W_i' \cap L_i'$ обозначим через h_i $(h_i \geqslant 0)$, а его конец через V_i'. Тело W_i' с отмеченной на нем точкой V_i' назовем ориентированным телом. Будем считать, что тело W_i ориентированное и V_i — отмеченная на нем точка. Пусть $\varphi_i(v)$ — вещественная неотрицательная непрерывная слева функция скалярного неотрицательного аргумента, удовлетворяющая соотношениям

$$0 < \varphi_i(0) < h_i; \quad 0 < \varphi_i(v) \leqslant h_i, \quad 0 \leqslant v < v_{i0};$$

$$\varphi_i(v_{i0}) = 0 \quad \text{при} \quad h_i > 0; \tag{9}$$

$$\varphi_i \equiv 0 \quad \text{при} \quad h_i = 0. \tag{10}$$

Предполагается, что i-му объекту поставлена в соответствие пара W_i, φ_i. Положение тела W_i в момент t для случая $\dot{r}_i(t) \neq 0$ определяется следующим образом: во-первых, прямая L_i проходит через начало O координатной системы и имеет направление вектора $\dot{r}_i(t)$; во-вторых, направление вектора $\overline{OV_i}$ совпадает с направлением L_i, а длина $|\overline{OV_i}| = \varphi_i(|\dot{r}_i(t)|)$. Случай $\dot{r}_i(t) = 0$ нам по существу не понадобится и поэтому здесь рассмотрен не будет. Подчеркивая отмеченную зависимость положения тела W_i в $\mathbf{E}^n$ от $\dot{r}_i(t)$, φ_i, мы будем в дальнейшем обозначать тело W_i обычно: $W_i(\dot{r}_i(t), \varphi_i(|\dot{r}_i(t)|))$. Скажем, что движение принадлежит классу (1), если оно описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{r}_i(t) = u_i(t), \quad t \geqslant 0, \quad r_i(0) = r_i^0, \quad \dot{r}_i(0) = \dot{r}_i^0, \quad |\dot{r}_i(0)| \leqslant v_{i0}, \tag{11}$$

где u_i — управление, являющееся измеримой вектор-функцией, причем конец радиуса-вектора u_i принадлежит телу W_i,

$$u_i(t) \in W_i(\dot{r}_i(t), \varphi_i(|\dot{r}_i(t)|)). \tag{12}$$

Заметим, что множество W_i аналогично множеству $U(t, y, z)$, рассмотренному в [3], а v_{i0}, в силу (9), (11), (12), есть максимум нормы скорости.

В дальнейшем, если не оговорено противное, рассматривается случай (9).

Из эквивалентности соотношений $\varphi_i(v) \to 0$, $v \to v_{i0}$ $(v < v_{i0})$ можно установить, что для достаточно малого $\delta > 0$ найдется такое допустимое управление

$$u_i^*(t), \quad t \in [0, t_i(\delta)], \tag{13}$$

где $t_i(\delta)$ — конечное число, что будет выполнено равенство

$$|\dot{r}_i(t_i(\delta))| = v_{i0} - \delta = v_{i\delta}. \tag{14}$$

В двумерной плоскости Q_i, проходящей через L_i, введем прямоугольную систему координат (φ, ψ) с началом в точке V_i и осью $V_i\Phi$, имеющей направление, противоположное направлению L_i. Пусть

$$(M_i): \quad \psi = F_i(\varphi), \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_i' \leqslant h_i, \quad 0 \leqslant \psi \leqslant \psi_i' = \max_{\varphi} F_i(\varphi) =$$
$$= F_i(\varphi_i') > 0 \tag{15}$$

есть дуга, состоящая из граничных точек сечения $Q_i \cap W_i$, лежащая в первом квадранте, взаимно однозначно проектирующаяся на ось $V_i\psi$ и ближайшая к этой оси (случай неоднозначной в точке $\varphi = 0$ функции F_i не исключается).

Можно показать, что существует допустимое управление

$$\hat{u}_i(t), \; t \geqslant t_i(\delta), \tag{16}$$

для которого выполняются требования (14) и

$$(\hat{u}_i, \dot{r}_i) = 0, \; t \geqslant t_i(\delta), \; |\hat{u}_i| \leqslant F_i(\varphi_i(v_{i\delta})) \equiv \theta_i(\delta). \tag{17}$$

Пусть выполнено условие (14) при $t_i(\delta) = t_{0i}$ и соотношение

$$\dot{r}_i(t_{0i}) = \mu r(t_{0i}), \quad \mu > 0, \; |r(t_{0i})| \geqslant \frac{v_{i\delta} v_{j0}}{\theta_i(\delta)} \equiv l_{i\delta}, \quad i, j = 1, 2; \quad i \neq j \tag{18}$$

(см. (5), (17)). Тогда, используя (16), можно построить допустимую стратегию f, сохраняющую одинаковое направление векторов $\dot{r}_i$, r и норму $|\dot{r}_i|$ до момента обращения неравенства $|r| > l_{i\delta}$ в равенство.

Справедливы следующие теоремы, аналогичные соответственно теоремам Ã и Б̃.

Т е о р е м а А. *Пусть*

$$l \geqslant l_{1\delta} \tag{19}$$

(*см.* (18)); *тогда для существования преследующей стратегии* f_1^* *при любых начальных условиях, удовлетворяющих требованиям* (11) *и естественному неравенству* $|r(0)| > l$, *необходимо и достаточно выполнения условия*

$$v_{10} > v_{20}. \tag{20}$$

Необходимость условия (20) очевидна. Доказательство достаточности проводится прямым построением преследующей стратегии (что, возможно, имеет и самостоятельный интерес ([2])):

$$f_1^*: \begin{cases} u_1^*, & t \in [0, t_1(\delta) + t_1'), \quad t_1' \geqslant 0; & (21) \\ \hat{f}_1, & t \in [t_1(\delta) + t_1', t_{01}); & (22) \\ f_1^0, & t \in [t_{01}, T(f_1^*, f_2)] & (23) \end{cases}$$

(см. (13)), где

$$\delta \in (0, \; {}^1/_2 \min(v_{20}, \; (v_{10} - v_{20}))),$$

$\hat{f}_1$ — стратегия, строящаяся с помощью (16) и приводящая к совпадению направлений векторов $\dot{r}_i, r$ (см. (18)), а $T(f_1^*, f_2)$ — абсолютная плата (см. (2)), получающаяся при реализации пары f_1^*, f_2 допустимых стратегий соответственно первого и второго игрока.

Пусть выполняется соотношение

$$|r(0)| > \rho(\delta) > l \geqslant l_\delta = \max_i l_{i\delta}, \tag{24}$$

где δ достаточно мало, а $\rho(\delta)$ достаточно велико. Интегрируя (6), получим

$$l = |r(T(f_1, f_2))| = \int_0^\tau [(\dot{r}_2, e) - (\dot{r}_1, e)]\, dt + |r(0)|, \quad \tau = T(f_1, f_2). \tag{25}$$

Ввведем относительную плату (см. (2)):

$$P(f_1, f_2) = \frac{T(f_1, f_2)}{T_0}, \; T_0 = \frac{|r(0)| - l}{v_{1\delta} - v_{2\delta}} = \frac{|r(0)| - l}{v_{10} - v_{20}}. \tag{26}$$

Обозначим через f_2^* стратегию, аналогичную f_1^* и получаемую заменой в (21) — (23) нижнего индекса 1 на 2. Скажем, что стратегии f_i^* образуют ε-седловую пару, если выполняются неравенства

$$P(f_1^*, f_2) - \varepsilon < P(f_1^*, f_2^*) < P(f_1, f_2^*) + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \tag{27}$$

Теорема Б. *Пусть начальные условия удовлетворяют требованиям* (11), (24) *и выполняется условие* (20); *тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдутся такие* $\delta > 0$ *и* $\rho(\delta) > 0$, *что стратегии* f_i^* *образуют* ε-*седловую пару и выполняется неравенство*

$$|P(f_1^*, f_2^*) - 1| < \varepsilon. \tag{28}$$

Неравенства (27), (28) получаются из соотношений (25), (26), если в них в качестве пар f_1, f_2 брать пары f_1^*, f_2; f_1, f_2^*; f_1^*, f_2^*.

Сравнение соотношений (7) (см. (3)), (8), (4) соответственно с соотношениями (20), (26), (28), (23), (27) позволяет в случае (9) количественно оценить сходство между играми $\tilde{\Gamma}$ и Γ, о котором говорилось в начале заметки. При этом оказывается, что стратегии f_i^* их действия на главной части $[t_{0i}, T]$ отрезка времени $[0, T]$ весьма сходны с $\overset{*}{f_i}$ (см. (4), (14)).

В случае (10), который сейчас будет рассмотрен, тело W_i есть $(n-1)$-мерный круг радиуса $\psi_i' = \theta_i$ (см. 15); (17)), ортогональный вектору $\dot{r}_i$, а допустимое управление имеет вид (16), следовательно, $<\dot{r}_i| \equiv v_{i0} > 0$. Соотношение (19) превращается в

$$l \geqslant l_{1\delta} = v_{10}v_{20} / \psi_1' \tag{29}$$

(см. (18)), а в (21), (22) нужно положить $t_1(\delta) + t_1' = 0$. При этом оказывается, что пара стратегий f_i^* седловая для абсолютной платы, если кроме (24) выполнено неравенство

$$|r(0)| > l_\delta + 2(\pi + 1)(v_{10} + v_{20})\left(\frac{v_{10}}{\theta_1} + \frac{v_{20}}{\theta_2}\right). \tag{30}$$

Тем самым факт существования преследующей стратегии, постулируемый в ([4]), при выполнении условий (24), (29), (30) оказывается доказанным (преследующее управление существует отнюдь не для любого l! (см. ([8]))).

Элементарно устанавливается

Теорема В. *Если преследующий совершает простое движение и норма его скорости равна* v_{10}, *а норма скорости преследуемого ограничена сверху числом* v_{20}, *то при любых начальных условиях и любом* $l \geqslant 0$ *выполнения неравенства* (20) *достаточно для существования преследующей стратегии; при этом стратегия* $\bar{f}_1^*$ *оказывается гарантированной.*

Из теоремы В непосредственно вытекает справедливость теоремы 2 работы ([5]) для случая $a > b$ (ибо при $\theta_1 = \infty$ движение преследующего в случае (10) равносильно простому движению).

Автор благодарит Н. Н. Красовского за внимание к работе.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
9 VI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. С. Понтрягин, УМН, **21**, в. 4, 219 (1966). [2] Н. Н. Красовский, УМН, **20**, в. 3, 153 (1965). [3] Н. Н. Красовский, Дифференциальные уравнения, **5**, в. 3, 407 (1969). [4] Э. Н. Симакова, Автоматика и телемех., № 2, 5 (1967). [5] Э. Н. Симакова, Автоматика и телемех., № 7, 19 (1968). [6] В. Н. Лагунов, Дискретный анализ, Новосибирск, в. 11, 1967, стр. 61. [7] В. Н. Лагунов, Управляемые системы, Новосибирск, в. 1 1968, стр. 34. [8] В. Н. Лагунов, Управляемые системы, Новосибирск, в. 2, 1969, стр. 60.