Доклады Академии наук СССР
1971. Том 197, № 2

УДК 517.925.32 *МАТЕМАТИКА*

В. А. ПЛИСС

О СЕПАРАТРИСАХ СЕДЛОВЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 6 X 1970)

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = X(x, t), \tag{1}$$

где x и X — двумерные векторы, вектор-функция X дважды непрерывно дифференцируема по всем своим аргументам и периодична по t:

$$X(x, t+\omega) = X(x, t). \tag{2}$$

В дальнейшем предполагается, что существует столь малое $\varepsilon > 0$, что для всякой дважды непрерывно дифференцируемой ω-периодической вектор-функции $R(x, t)$, удовлетворяющей условию

$$|R(x,t)| < \varepsilon, \quad \left|\frac{\partial R}{\partial x}\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{\partial R}{\partial t}\right| < \varepsilon, \tag{3}$$

система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = X(x, t) + R(x, t) \tag{4}$$

не имеет периодических решений с нулевыми характеристическими показателями.

Пусть $x(t, t_0, x_0)$ — решение системы (1), а T — преобразование Пуанкаре, определяемое формулой $Tx_0 = x(\omega, 0, x_0)$.

Пусть p — периодическая точка преобразования T, т. е. $T^k p = p$, тогда решение $x(t, 0, p)$ имеет период $k\omega$. Предположим, что это решение имеет характеристические показатели разных знаков. Известно ([1]), что в этом случае существуют две гладкие дуги Λ^+ и Λ^-, содержащие точку p внутри себя и удовлетворяющие соотношениям

$$T^k\Lambda^+ \subset \Lambda^+, \quad T^{-k}\Lambda^- \subset \Lambda^-. \tag{5}$$

Эти дуги обычно называются сепаратрисами.

Предположим, что преобразование T имеет замкнутое ограниченное инвариантное множество $\mathcal{M}$ с нулевой мерой. Системы дифференциальных уравнений вида (1), имеющие такие инвариантные множества, весьма детально изучались ранее ([2-7]).

Оказывается, что сепаратрисы периодических решений, проходящих через точки множества $\mathcal{M}$, обладают следующими свойствами.

Обозначим через L^+ и L^- касательные к Λ^+ и Λ^-, проходящие через p, и пусть L^+, L^- — наименьший угол между прямыми L^+ и L^-.

Т е о р е м а 1. *Существует такое* $\alpha > 0$, *что для всякой периодической точки* $p \in \mathcal{M}$

$$\sphericalangle L^+, L^- > \alpha. \tag{6}$$

Пусть опять p — периодическая точка, лежащая на $\mathcal{M}$, Λ^+, Λ^- — сепаратрисы, а L^+ и L^- — касательные к ним.

Обозначим через N^+ и N^- нормали к L^+ и L^- соответственно, проведенные через точку p. Считая L^+ и N^+ осями координат, введем в окрестности точки p координаты u_1, u_2. При этом в качестве координат выбираются длины соответствующих отрезков, взятые с определенным знаком. В окрестности точки p Λ^+ представима в виде

$$u_2 = f(u_1). \tag{7}$$

Аналогично, если взять за оси координат v_1, v_2 прямые L^- и N^-, то Λ^- может быть представлена в виде

$$v_2 = g(v_1). \tag{8}$$

Теорема 2. *Существуют такие числа $\beta > 0$ и $h > 0$, что для любой периодической точки $p \in \mathcal{M}$ $f(\xi)$ и $g(\xi)$ определены при $|\xi| \leqslant \beta$ и*

$$|f'(u_1)| \leqslant h|u_1|, \quad |g'(v_1)| \leqslant h|v_1|. \tag{9}$$

Из этих теорем вытекают следующие утверждения.

Следствие 1. *Если через $\mathcal{M}$ проходит бесконечно много периодических решений системы (1), то любое такое решение с достаточно большим периодом имеет двояко асимптотическую траекторию* *.

Следствие 2. *Если множество $\mathcal{M}$ асимптотически устойчиво и через него проходит бесконечно много периодических решений системы (1), то множество $\mathcal{M}$ содержит неразложимый континуум.*

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
16 IX 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] O. Perron, Math. Zs., 31 (1929). [2] J. E. Littlewood, Acta Math., 98, № 1, 2 (1957). [3] M. L. Cartwright, Contr. to the Theory of Nonlinear Oscillations, 1, 1950. [4] M. L. Cartwright, J. E. Littlewood, Ann. Math., 54, 1 (1951). [5] В. А. Плисс, Нелокальные проблемы теории колебаний, М.— Л., 1964. [6] В. А. Плисс, Дифференциальные уравнения, 2, № 6 (1966). [7] В. А. Плисс, Дифференциальные уравнения, 3, № 5 (1967). [8] S. Smale, Proceedings of the International Congress of Mathematicals, Uppsala, 1963, p. 490.

* Это следствие в рассматриваемом случае подтверждает предположение Смейла ([8]) относительно существования гомоклинических точек в грубых случаях.