Доклады Академии наук СССР
1970. Том 195, № 4

УДК 517.946 **МАТЕМАТИКА**

А. М. НАХУШЕВ

О ЗАДАЧЕ ДАРБУ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 11 V 1970)

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{yy} - k(y)u_{xx} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, y), \quad (1)$$

где $k(y) > 0$ при $y \neq 0$ и может обращаться в нуль при $y = 0$.

Пусть D — односвязная область плоскости независимых переменных x, y, ограниченная характеристиками AC и CB уравнения (1), выходящими из точки $C(^1/_2, y_c)$, $y_c < 0$ и отрезком AB: $0 < x < 1$ оси $y = 0$.

Относительно коэффициентов k и b уравнения (1) будем предполагать, что они непрерывны в замыкании $\bar{D} = D \cup \partial D$ области D, а относительно a и c — их непрерывность в $\bar{D}$ вместе с производной по x.

Обозначим через W множество функций $u = u(x, y)$ из класса $C(\bar{D}) \cap C^2(D) \cap W_2^1(D) \cap W_2^1(\partial D)$, где $W_2^1(D)$ — пространство Соболева, для которых $Lu \in L_2(D)$ и соблюдены краевые условия

$$u|_{AB \cup BC} = 0, \text{ или } u_y|_{AB} = 0, \quad u|_{BC} = 0. \quad (2)$$

Задача Дарбу. Найти функцию $u \in W$, удовлетворяющую уравнению (1) в области D.

Единственность и существование неоднородной задачи Дарбу: $u_y|_{AB} = \nu(x)$, $u|_{BC} = \psi(y)$, для уравнения (1) в случае, когда $k(y) = -y^m$, $m \equiv 1 \pmod 2$, a и $b \in C^3(\bar{D})$, $c, f \in C^1(\bar{D})$, и кроме того при $m \geqslant 2$ функция a представима в виде $a = |y|^n a_1(x, y)$ с $a_1 \in C(\bar{D})$ и $n > m/2 - 1$, были установлены Геллерстедтом [1] методом функции Грина — Адамара.

Теорема. *Пусть коэффициенты уравнения* (1) *удовлетворяют одному из следующих условий:*

1. $k(0) \neq 0$ *или* $a(x, 0) > 0$ *при* $0 \leqslant x \leqslant 1$;
2. a/k, $b^2/k \in C(\bar{D})$, $c(x, 0) < 0$ *при* $0 \leqslant x \leqslant 1$;
3. a/k, b^2/k, a_x/k, c/k, $c_x/k \in C(\bar{D})$;
4. k/a, $b^2/a \in C(\bar{D})$, $a > 0$, $c(x, 0) < 0$ *при* $y \neq 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$;
5. k/a, b^2/a, c/k, $c_x/k \in C(\bar{D})$, $a > 0$ *при* $y \neq 0$, $a_x \geqslant 0$.

Тогда имеет место априорная оценка вида

$$\|u\|_{++} \leqslant C\|Lu\|_+, \quad \forall u \in W,$$

где $\|\cdot\|_{++}$, $\|\cdot\|_+$ — *некоторые позитивные нормы, а* C — *не зависящая от* u *постоянная.*

Доказательство. Введем оператор

$$L_\mu v \equiv v_{yy} - kv_{xx} + a_\mu v_x + bv_y + c_\mu v,$$

где

$$\mu \equiv \text{const} < 0, \quad a_\mu = a - 2\mu k, \quad c_\mu = c + a\mu - k\mu^2.$$

Легко проверить, что если $u = v\exp(\mu x)$ и $u \in W$, то $Lu = \exp(\mu x)L_\mu v$ и $v \in W$. Для любой функции $d = d(x) \in C^1(\bar{D})$ и $v \in W$ справедливо тождество

$$2(dv_x, L_\mu v)_0 = 2\int\limits_D dv_x L_\mu v\,dD = \int\limits_D [d_x(kv_x^2 + v_y^2) + 2da_\mu v_x^2 + 2dbv_xv_y]\,dD -$$
$$- \int\limits_D (dc_\mu)_x v^2 dD + \int\limits_{\partial D} dc_\mu x_n v^2 dS +$$
$$+ \int\limits_{\partial D} d\,[-(kv_x^2 + v_y^2)\,x_n + 2y_n v_x v_y]\,dS = \sum_{j=1}^{4} I_j, \qquad (3)$$

где x_n и y_n — направляющие косинусы внешней нормали $n = (x_n, y_n)$ к границе области D.

Поскольку корни характеристического уравнения $\lambda(\lambda + x_n + kx_n) = 0$, соответствующего квадратичной форме $-kx_n\xi^2 + 2y_n\xi\eta - x_n\eta^2$ на характеристике AC, неотрицательны, а на характеристике BC в силу (2), $v_x = v_n x_n$, $v_y = v_n y_n$, то нетрудно убедиться в том, что $I_4 \geqslant 0$ для всех $v \in W$, если $d(x) \geqslant 0$ в D.

Предположим, что $d = \exp(\alpha x)$, где $\alpha \equiv \mathrm{const} > 0$. Из (3) и простого неравенства $2bv_xv_y \geqslant -\varepsilon b^2 v_x^2 - \frac{1}{\varepsilon} v_y^2$, справедливого для любого $\varepsilon > 0$, имеем

$$\int\limits_D d\,[(\alpha k + 2a_\mu - \varepsilon b^2)\,v_x^2 + (\alpha - 1/\varepsilon)\,v_y^2]\,dD + I_2 + I_3 \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon \|v_x \sqrt{d\omega}\|_0^2 + C\|\omega^{-1/2} L_\mu v\|_0^2, \qquad (4)$$

где $\omega = \omega(x, y)$ — любая неотрицательная функция из класса $C(\bar{D})$, а $\|\cdot\|_0$ — норма в пространстве $L_2(D)$. Здесь и ниже C означает некоторую положительную постоянную, которая не зависит от v.

Для удобства введем позитивные нормы по формулам

$$\|v\|_{1,\varphi,\psi} = \left[\int\limits_D (\varphi v_x^2 + v_y^2 + \psi v^2)\,dD\right]^{1/2}, \quad \|v\|_{1,\varphi,1} \equiv \|v\|_{1,\varphi},$$
$$\|v\|_{0,\varphi} = \left(\int\limits_D \frac{v^2}{\varphi}\,dD\right)^{1/2}, \quad \|v\|_{j,1} \equiv \|v\|_j, \quad j = 0, 1.$$

Перепишем неравенство (4) в виде

$$\int\limits_D d\,[a_\mu^\alpha v_x^2 + (\alpha - 1/\varepsilon)\,v_y^2 - c_\mu^\alpha v^2]\,dD \leqslant C\|L_\mu v\|_{0,\omega} - I_3, \qquad (5)$$

где

$$a_\mu^\alpha = 2a + (\alpha - 4\mu)\,k - \varepsilon\,(b^2 + \omega),$$
$$c_\mu^\alpha = \alpha c + c_x + (\alpha a + a_x)\mu - \alpha k\mu^2 = \alpha c_\mu + c_{\mu x}.$$

Пусть соблюдено условие 1 теоремы, например, $a(x, 0) > 0$. Положим $\mu < -\min\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} c(x, 0)\,/\,a(x, 0)$. Тогда при достаточно малых значениях ε, найдется такое число $\delta < 0$, что

$$c_\mu < 0, \quad a_\mu^\alpha > 0, \quad \forall\,(x, y) \in \bar{D} \cap (\delta \leqslant y \leqslant 0).$$

Поэтому существует такое, не зависящее от α число μ_0, что

$$c_{\mu_0} < 0, \quad a_{\mu_0}^\alpha > 0, \quad \forall\,\alpha > 0, \quad (x, y) \in \bar{D} \qquad (6)$$

и число α_0, зависящее от μ_0, что

$$c_{\mu_0}^{\alpha_0} < 0, \quad \forall\,(x, y) \in \bar{D}. \qquad (7)$$

Принимая во внимание (6) и (7), из (5), при $\omega \equiv 1$, получаем энергетическое неравенство

$$\|v\|_1 \leqslant C\|L_{\mu_0} v\|_0, \quad \forall v \in W. \qquad (8)$$

Аналогично, но еще проще, доказывается оценка (8), когда $k(0) \neq 0$, т. е. уравнение (1) строго гиперболично.

Если имеет место условие 2, то при $\omega \equiv k$, очевидно, существует такое, не зависящее от α, число μ_0, что

$$c_{\mu_0} < 0, \quad a^{\alpha}_{\mu_0}/k = \alpha - 4\mu_0 + (2a - \varepsilon b^2 - \varepsilon k)/k > 0, \quad \forall (x, y) \in \overline{D}$$

и такое число α_0, что верно (7). Следовательно, в силу (5), $\| v \|_{1,k} \leqslant C \| L_{\mu_0} v \|_{0,k}, \quad \forall v \in W$.

Пусть теперь выполнено условие 3. Тогда при $\omega \equiv k$ найдется число μ_0, которое не зависит от α, что $c_{\mu_0} / k < 0$, $a_{\mu_0}{}^{\alpha} / k > 0$ в $\overline{D}$ и такое число α_0, что $c_{\mu_0}{}^{\alpha_0} / k < 0$ в $\overline{D}$. Поэтому в соответствии с (5) имеем $\| v \|_{1,k,k} \leqslant C \| L_{\mu_0} v \|_{0,k}$, $\forall v \in W$.

Точно также убеждаемся в том, что $\forall v \in W$, $\| v \|_{1,a} \leqslant C \| L_{\mu_0} v \|_{0,a}$ и $\| v \|_{1,a,k} \leqslant C \| L_{\mu_0} v \|_{0,a}$ при соблюдении условий 4 и 5 соответственно, а это и завершает доказательство теоремы.

Из доказанной теоремы следует единственность регулярного решения задачи Дарбу и существование слабого решения сопряженной задачи $v_{yy} - kv_{xx} - (av)_x - (bv)_y + cv = f$, $v|_{AB \cup AC} = 0$ в функциональных пространствах, соответствующих априорной оценке.

Нетрудно показать, что основное неравенство (5) гарантирует единственность решения задачи Дарбу и при более общих предположениях относительно коэффициентов уравнения (1). Однако, следует отметить, что *некоторые из условий теоремы являются существенными и их нарушение может привести даже к неединственности решения задачи Дарбу.*

Пример 1. Функция

$$u = \sin\left(x - 1 + \int\limits_y^0 \exp\frac{1}{2t}\,dt\right)$$

в области D является решением однородной задачи Дарбу: $u|_{BC} = 0$, $u_y|_{AB} = 0$ для уравнения

$$u_{yy} - \exp\left(\frac{1}{y}\right) u_{xx} - \frac{1}{2y^2} \exp\left(\frac{1}{2y}\right) u_x = 0.$$

Пример 2. Общее решение уравнения

$$u_{yy} - y^2 u_{xx} - u_x = 0 \tag{9}$$

в классе функций $u \in C^1(D \cup AB) \cap C^2(D)$, обладающих тем свойством, что $u(x, 0)$ и $u_y(x, 0) \in C^1(0 \leqslant x \leqslant 1) \cap C^2(0 < x < 1)$ дается формулой (2)

$$u(x, y) = \tau(x + {}^1\!/_2 y^2) + {}^1\!/_2 y \int\limits_0^1 \nu(x + {}^1\!/_2 y^2 - y^2 t)\frac{dt}{\sqrt{t}}, \tag{10}$$

где $\tau(x)$ и $\nu(x)$ — произвольные функции из $C^1(0 \leqslant x \leqslant 1) \cap C^2(0 < x < 1)$.

Воспользовавшись формулой (10), нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения: *однородная задача, соответствующая неоднородной задаче Дарбу: $u_y|_{AB} = \nu(x)$, $u|_{BC} = \psi(x)$ для уравнения (9), имеет бесчисленное множество линейно независимых решений, а неоднородная разрешима тогда и только тогда, когда*

$$\nu(x) = \psi_*(x) \equiv \sqrt{1 - x}\,\psi'({}^1\!/_2 + x/2).$$

Для уравнения (9) корректно поставлена задача Дарбу, когда u задается не на BC, а на AC, что говорит о неравноправности этих характеристик, или когда на AB задается не u_y, а u и, наконец, следующая краевая задаче

$$u|_{BC} = \psi(x), \quad \lim_{y \to 0} [u_y - \psi_*(x)] / y = \nu(x), \quad 0 < x < 1,$$

если, например, $\psi(x) \in C^4({}^1\!/_2 \leqslant x \leqslant 1)$, $\nu(x) \in C^1(0 \leqslant x \leqslant 1) \cap C^2(0 < x < 1)$.

Любопытно отметить, что уравнение (9) приведено А. В. Бицадзе ([2]), как пример уравнения, для которого задача Коши с начальными данными на линии параболического вырождения корректна. Следовательно, *в отличие от строго гиперболических уравнений, или от вырождающихся уравнений с нехарактеристическим степенным вырождением порядка меньшего двух, из корректности задачи Коши не следует, вообще говоря, корректность соответствующих задач Дарбу, если порядок вырождения больше либо равен двум.*

В заключение отметим, что в связи с приведенными здесь примерами возникает вопрос, может ли неединственность решения задачи Дарбу повлиять на единственность известной задачи Трикоми. Например, легко убедиться, что для уравнения

$$\operatorname{sign} y \cdot y^2 u_{xx} + u_{yy} - u_x = 0$$

этого не происходит.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
30 IV 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Gellerstedt, Ark. Mat., Astron., Fys., 25A, № 29 (1937). [2] А. В. Бицадзе, Уравнения смешанного типа, М., 1959.