Доклады Академии наук СССР
1971. Том 197, № 2

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

Д. В. ПРОКА

О СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 16 X 1970)

Пусть $u(x, t)$, $x \geqslant 0$, $t \geqslant 0$ — ограниченное по x при каждом $t \geqslant 0$ решение задачи

$$Lu \equiv \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + (-1)^p \frac{\partial^{2p} u(x,t)}{\partial x^{2p}} = 0, \quad t > 0, \quad x > 0, \tag{1}$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x > 0, \tag{2}$$

$$b^{(j)}(\partial / \partial x) u(x, t)|_{x=0} = \varphi_j(t), \quad j = 1, 2, \ldots, p, \quad t > 0, \tag{3}$$

где $b^{(j)}(\partial / \partial x)$ — многочлены с действительными коэффициентами относительно $\partial / \partial x$ степени n_j, $j = 1, 2, \ldots, p$, удовлетворяющие по отношению к оператору L условию Лопатинского.

Предполагается, что функции $\varphi_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, p$, удовлетворяют некоторым условиям гладкости и согласования, при которых существует единственное решение задачи (1) — (3), ([1]) в пространстве $C_{x,t}^{2pl\,l}$, где l — некоторое натуральное число. Под $C_{x,t}^{2pl\,l}$ подразумевается множество функций, непрерывных и ограниченных при $x \geqslant 0$, любом $t \geqslant 0$ вместе со всеми своими производными до порядка $2pl$ по x и l по t.

Будем говорить, что функция $u(x, t)$ стабилизируется при $t \to \infty$, если для любого $x \geqslant 0$ существует конечный предел этой функции при $t \to \infty$.

Целью настоящей заметки является изучение стабилизации решения $u(x, t)$ задачи (1) — (3).

Пусть λ — комплексный параметр, ω_j, $j = 1, 2, \ldots, p$, — корни степени $2p$ из -1 с положительными мнимыми частями и $z = \sqrt[2p]{\lambda}$ — корень степени $2p$ из λ, вещественный при вещественном $\lambda > 0$.

Следующая лемма позволяет сформулировать основной результат.

Лемма. *Кратность корня $z = 0$ многочлена*

$$P(z) = \det \| b^{(j)}(i\omega_s z) \|, \quad j, s = 1, 2, \ldots, p,$$

не меньше $p(p-1)/2$; следовательно, функция $Q(z) \equiv z^{\frac{1}{2}p(p-1)} P(z)$ есть многочлен.

Теорема. *Для того чтобы решение $u(x, t)$ задачи (1) — (3) стабилизировалось при $t \to \infty$ для любых функций $\varphi_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, p$, имеющих конечные пределы при $t \to \infty$, необходимо и достаточно, чтобы корни многочлена $Q(z)$ лежали в секторе $|\arg z| > \pi / 4p$, $z \neq 0$.*

Для случая, когда уравнение (1) есть уравнение теплопроводности ($p = 1$), этот результат был получен другим методом А. Н. Тихоновым ([2]).

Рассмотрим для $\operatorname{Re} \lambda > 0$ ограниченное при $x \geqslant 0$ решение $v(x, \lambda)$ граничной задачи

$$\lambda v(x, \lambda) = (-1)^{p-1} \frac{d^{2p} v(x, \lambda)}{dx^{2p}}, \quad \operatorname{Re} \lambda > 0, \tag{4}$$

$$b^{(j)}\left(\frac{d}{dx}\right)v(x,\lambda)\Big|_{x=0}=\widetilde{\varphi}_j(\lambda),\quad j=1,2,\ldots,p, \tag{5}$$

где $\widetilde{\varphi}_j(\lambda)=\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\varphi_j(t)\,dt$, $j=1,2,\ldots,p$,— аналитические функции по λ для $\operatorname{Re}\lambda>0$.

Условие Лопатинского, выполнимость которого для задачи (1)—(3) мы предположили, имеет вид $P(\sqrt[2p]{\lambda})\not\equiv 0$, поэтому можно найти такое $\sigma>0$, что $P(\sqrt[2p]{\lambda})\neq 0$ для $\operatorname{Re}\lambda\geqslant\sigma$. Для таких λ решение задачи (4)—(5) записывается в виде

$$v(x,\lambda)=\sum_{j=1}^{p}\widetilde{\varphi}_j(\lambda)\,\widetilde{G}_j(x,\lambda), \tag{6}$$

где

$$\widetilde{G}_j(x,\lambda)=P^{(j)}(x,\sqrt[2p]{\lambda})/P(\sqrt[2p]{\lambda}), \tag{7}$$

$$P^{(j)}(x,z)=\sum_{s=1}^{p}P_{js}(x,z)\cdot e^{i\omega_s zx},\quad j=1,2,\ldots,p, \tag{8}$$

а $P_{js}(x,\ z)$ — алгебраическое дополнение, соответствующее элементу $b^{(j)}(i\omega_s z)$ матрицы $\|b^{(j)}(i\omega_s z)\|$, $j,s=1,2,\ldots,p$.

Можно доказать, что кратность корня $z=0$ каждой из функций (8) не меньше $^1/_2 p(p-1)$. Следовательно,

$$P^{(j)}(x,z)=z^{\frac{1}{2}p(p-1)}Q^{(j)}(x,z),\quad j=1,2,\ldots,p, \tag{9}$$

где $Q^{(j)}(x,z)$ — целая аналитическая функция от z.

Из (7) и (9) следует, что для всех $x\geqslant 0$

$$|\widetilde{G}_j(x,\lambda)|\leqslant\text{const},\quad j=1,2,\ldots,p, \tag{10}$$

в любом компакте по λ, $|\arg\lambda|\leqslant\pi$, в котором нет корней функции $Q(\sqrt[2p]{\lambda})$. Кроме того, при всех λ, для которых $|\lambda|$ достаточно велик и $|\arg\lambda|\leqslant\pi-\theta_0$,

$$|\widetilde{G}_j(x,\lambda)|\leqslant\text{const}\cdot e^{-\theta x\sqrt[2p]{|\lambda|}},\quad j=1,2,\ldots,p, \tag{11}$$

где θ_0 и θ — некоторые положительные постоянные.

Из оценок (10) и (11) следует, что $v(x,\lambda)$ является преобразованием Лапласа функции $u(x,t)$.

Наметим схему доказательства достаточности. По условию корни функции $Q(\sqrt[2p]{\lambda})$ располагаются в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda<0$. Поскольку число корней конечное, то найдется такое $\delta>0$, что все корни функции $Q(\sqrt[2p]{\lambda})$ будут располагаться в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda<-\delta$.

Из оценок (10) и (11) следует, что контур $\Gamma=\{\operatorname{Re}\lambda=\sigma,\sigma>0\}$ в формуле обратного преобразования Лапласа, дающей выражение $u(x,t)$ через $v(x,\lambda)$, можно заменить контуром

$$\Gamma'=\Gamma_1\cup\Gamma_\varepsilon^+\cup\Gamma_\varepsilon\cup\Gamma_\varepsilon^-\cup\Gamma_2,$$

где $\Gamma_1=\left\{\operatorname{Re}\lambda=-\delta,\frac{\pi}{2}\leqslant\arg\lambda\leqslant\pi\right\}$, $\Gamma_\varepsilon^+=\{-\delta\leqslant\operatorname{Re}\lambda\leqslant-\varepsilon,\arg\lambda=\pi\}$, $\Gamma_\varepsilon=\{|\lambda|=\varepsilon,-\pi\leqslant\arg\lambda\leqslant\pi\}$, $\Gamma_\varepsilon^-=\{-\delta\leqslant\operatorname{Re}\lambda\leqslant-\varepsilon,$ $\arg\lambda=-\pi\}$, $\Gamma_2=\left\{\operatorname{Re}\lambda=-\delta,-\pi\leqslant\arg\lambda\leqslant-\frac{\pi}{2}\right\}$.

Поэтому

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\Gamma_1\cup\Gamma_2}+\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}+\int\limits_{\Gamma_\varepsilon^+\cup\Gamma_\varepsilon^-}\right)e^{\lambda t}v(x,\lambda)\,d\lambda \tag{12}$$

при произвольном малом $\varepsilon > 0$. После перехода к пределу при $\varepsilon \to 0$ в равенстве (12) получим, что существует конечный $\lim\limits_{t\to\infty} u(x, t) = M(x)$, если каждая из функций $\varphi_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, p$, имеет предел при $t \to \infty$. Функция $M(x)$ есть многочлен степени $p - 1$.

Для доказательства необходимости вначале устанавливается, что функция $Q(\sqrt[2p]{\lambda})$ не может иметь корней в области $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$, $\lambda \neq 0$. Предполагая тем не менее, что $z_0 = \sqrt[2p]{\lambda_0}$, $\operatorname{Re}\lambda_0 \geqslant 0$, $\lambda_0 \neq 0$, является корнем кратности $\varkappa \geqslant 1$ многочлена $Q(z)$, и используя стабилизацию при $t \to \infty$ решения $u(x, t)$ задачи (1)—(3), при произвольных стабилизирующихся граничных функциях $\varphi_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, p$, доказываем, что z_0 является корнем кратности не меньше $\varkappa$ каждой из функций $P_{js}(x, z)$, $j, s = 1, 2, \ldots, p$, что не может быть.

Если же предположить, что точка $z = 0$ является корнем многочлена $Q(z)$ с кратностью $\varkappa \geqslant 1$, то согласно лемме

$$P(z) = z^{\varkappa_0} R(z),$$

где $\varkappa_0 = {}^1/_2 p(p - 1) + \varkappa$ и $R(0) \neq 0$.

При этом можно показать, что по крайней мере одна из функций $P^{(j)}(x, z)$, $j = 1, 2, \ldots, p$, например, функция $P^{(m)}(x, z)$, имеет точку $z = 0$ нулем кратности строго меньше $\varkappa_0$. Но и этого быть не может, поскольку тогда решение $u(x, t)$ при $\varphi_j(t) = 0$, $j \neq m$, $j = 1, 2, \ldots, p$, $\varphi_m(t) = 1$ не было бы ограниченным при $t \to \infty$.

Автор приносит сердечную благодарность В. П. Михайлову и А. К. Гущину за постоянное внимание при выполнении данной работы.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
14 X 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Солонников, Тр. матем. инст. им. В. А. Стеклова, 83, 1965. [2] А. Н. Тихонов, Математич. сборн., 26 (68), 1 (1950).