Доклады Академии наук СССР
1970. Том 195, № 4

УДК 62-506.3 *МАТЕМАТИКА*

В. В. ПЕТРОВ, А. С. УСКОВ

# ИНФОРМАЦИОННЫЕ АСПЕКТЫ ПРОБЛЕМЫ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

*(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 8 V 1970)*

При решении проблем статистической оптимизации систем управления важную роль играет вопрос корректности постановки задачи. Задача считается поставленной корректно, если решение ее существует, единственно и устойчиво относительно малых вариаций исходных данных.

В этом смысле интегральные уравнения 1 рода, к которым сводятся многие задачи статистической динамики, некорректны.

Для эффективного решения этих уравнений А. Н. Тихоновым и М. М. Лаврентьевым были разработаны методы регуляризации [1-4]. В задачах статистической динамики эти методы получили дальнейшее развитие в работах В. В. Солодовникова и В. Л. Ленского [5, 6].

В предлагаемой заметке делается попытка показать информационное содержание проблемы регуляризации и установить ее непосредственную связь с информационными методами в теории управления.

Информационные оценки (пропускные способности) характеризуют предельные возможности системы, для реализации которых потребовались бы весьма большие задержки во времени [7-9].

Этим предельным возможностям соответствуют физически нереализуемые фильтры [7, 8]. Таким образом, для решения поставленной задачи и получения простых информационных соотношений представляется наиболее целесообразным рассмотреть метод регуляризации на примере таких фильтров.

На вход устройства типа воспроизведения поступает полезный сигнал $m(t)$ с наложенной на него помехой $n(t)$, так что входной сигнал $\varphi(t)$ имеет вид

$$\varphi(t) = m(t) + n(t).$$

$m(t)$ и $n(t)$ являются стационарными, случайными, гауссовскими, взаимно-некоррелированными процессами с известными корреляционными функциями $R_m(t)$, $R_n(t)$ (или спектральными плотностями $S_m(f)$, $S_n(f)$) и равными нулю математическими ожиданиями.

Оптимальная характеристика должна с минимальной среднеквадратической ошибкой (с.к.о.) воспроизводить на выходе полезный сигнал, поступающий на вход.

Регуляризующий функционал

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} k^2(t)\,dt \tag{1}$$

сводит задачу оптимизации без учета условия физической осуществимости к минимизации выражения

$$I = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} k^2(t)\,dt + \overline{\varepsilon^2}, \tag{2}$$

где

$$\overline{\varepsilon^2} = R_m(0) + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} R_\varphi(t-\tau)\,k(t)\,k(\tau)\,dt\,d\tau - 2\int_{-\infty}^{+\infty} R_m(t)\,k(t)\,dt \tag{3}$$

средний квадрат случайной ошибки.

$$R_\varphi(t) = R_m(t) + R_n(t).$$

Здесь $\lambda$ — множитель Лагранжа, $k(t)$ — искомая оптимальная импульсная переходная функция.

Необходимым и достаточным условием минимума функционала (2) является интегральное уравнение 2 рода

$$\lambda k(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} R_\varphi(t-\tau)\, k(\tau)\, d\tau = R_m(t). \tag{4}$$

Решение уравнения (4) в частотной области может быть представлено в виде

$$\Phi(jf) = S_m(f) \,/\, (S_m(f) + S_n(f) + \lambda). \tag{5}$$

Передаточную функцию (5) можно рассматривать как характеристику фильтра Шеннона ([7], [8]), на вход которого поступает помеха со спектральной плотностью

$$S_n^*(f) = S_n(f) + \lambda. \tag{6}$$

Множитель Лагранжа $\lambda$ соответствует спектральной плотности белого шума

$$\lambda = N^2. \tag{7}$$

С.к.о., соответствующая оптимальной характеристике (5), определяется формулой

$$\overline{\varepsilon^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_\varepsilon(f)\, df, \tag{8}$$

где

$$S_\varepsilon(f) = S_m(f)\,[S_n(f) + N^2] \,/\, (S_m(f) + S_n(f) + N^2). \tag{9}$$

Минимум с.к.о. $(\overline{\varepsilon^2})_{\min}$ имеет место при $N = 0$. Уровень белого шума находится из уравнения (8) по заданной величине с.к.о. $(\overline{\varepsilon^2})_0$, удовлетворяющей условию

$$(\overline{\varepsilon^2})_0 > (\overline{\varepsilon^2})_{\min}. \tag{10}$$

Сигнал $\varepsilon(t)$ будем рассматривать приближенно ограниченным по спектру (ширина полосы частот $W$) и по времени (протяженность по времени $T$).

В узкой полосе частот спектра $\Delta f$ энтропия ошибки равна ([8], [10])

$$H_{\varepsilon\Delta f} = T\Delta f \log 2\pi e S_\varepsilon(f)\,\Delta f. \tag{11}$$

Информационная скорость сигнала ошибки в полосе частот $\Delta f$ составит

$$R_{\varepsilon\Delta f} = \Delta f \log 2\pi e S_m(f)\,\Delta f - \Delta f \log \frac{S_m(f)}{S_\varepsilon(f)}. \tag{12}$$

Общая скорость передачи информации сигналом ошибки определяется суммированием по всем частотам

$$R_\varepsilon = \int_W \log\,[2\pi e S_m(f)\,\Delta f]\, df - \int_W \log \frac{S_m(f)}{S_\varepsilon(f)}\, df. \tag{13}$$

В силу формул (9), (13) пропускная способность может быть представлена в виде

$$C = \int_W \log \frac{S_m(f) + S_n(f) + N^2}{S_n(f) + N^2}\, df. \tag{14}$$

Информация, приходящаяся на одну степень свободы сигнала ошибки, составит

$$H_n(\varepsilon) = H_n(m) - \frac{1}{W} \int_W \log \frac{S_m(f) + S_n(f) + N^2}{S_n(f) + N^2}\, df, \tag{15}$$

где

$$H_{n}(m)=\frac{1}{W}\int_{W}\log\left[2\pi eS_{m}(f)\Delta f\right]df. \quad (16)$$

Величина $H_n(\varepsilon)$ характеризует потерю информации при прохождении сигнала через фильтр.

Минимум $H_n(\varepsilon)$ соответствует $N=0$.

С увеличением уровня белого шума энтропия ошибки увеличивается и при $N\to\infty$ стремится к энтропии полезного сигнала. При этом пропускная способность $C\to 0$.

Аналогичные результаты могут быть получены при учете условия физической осуществимости

$$k(t)=0 \quad \text{при } t<0. \quad (17)$$

В этом случае регуляризующий функционал (1) сводит задачу Колмогорова — Винера к интегральному уравнению 2 рода

$$\lambda k(t)+\int_{0}^{\infty}R_{\varphi}(t-\tau)\,k(\tau)\,d\tau=R_{m}(t), \quad t>0. \quad (18)$$

Полученные методом регуляризации уравнения (4), (18) удовлетворяют условиям корректности по А. Н. Тихонову и численное решение их проще, чем уравнений первого рода.

С информационной точки зрения это эквивалентно подаче на вход системы дополнительной помехи в виде белого шума [4–7, 18], уровень которого определяется некоторой заданной допустимой ошибкой.

Уменьшение динамической точности в процессе регуляризации (10) приводит к соответствующему изменению информационных характеристик. Уменьшается пропускная способность (14), увеличивается энтропия ошибки (15), уменьшается полоса пропускания системы (5). Т. е. за счет введения допуска на динамическую точность, а следовательно, и на потерю информации метод регуляризации позволяет упростить задачу физической реализации системы.

В прикладной теории информации такие методы, использующие идеи регуляризации, нашли широкое применение. В основе развивающейся в последнее время информационной теории управления лежит стремление учесть специфику работы системы (динамические погрешности из-за ограниченности энергетических ресурсов) [8, 11]. При этом допускается ошибка (и ее не делают достаточно малой), что позволяет сузить полосу пропускания канала и уменьшить количество вспомогательной энергии, а, следовательно, габариты и вес приборов и устройств, входящих в систему.

Можно указать несколько вариантов применения такого подхода к вопросам проектирования информационных устройств и систем [6, 8, 11]. В основе всех этих вариантов лежит метод регуляризации.

Московский авиационный институт
им. С. Орджоникидзе

Поступило
10 I 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Тихонов, ДАН, 151, № 3 (1963). [2] А. Н. Тихонов, ДАН, 153, № 1 (1963). [3] А. Н. Тихонов, ДАН, 162, № 4 (1965). [4] М. М. Лаврентьев, О некоторых некорректных задачах математической физики, Новосибирск, 1962. [5] В. В. Солодовников, В. Л. Ленский, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 2 (1966). [6] Техническая кибернетика, Под ред. В. В. Солодовникова, Кн. 2, Гл. VIII, М., 1967. [7] B. N. Petrov, V. V. Petrov et al., Stochastic Process in Control and Information Systems. Survey Paper 63, IFAC, Warszawa, 1969. [8] В. В. Петров, А. С. Усков, Докл. семинара: Информационные методы в системах управления, измерений и контроля, Дальневосточн. центр. бюро технич. информ., Владивосток, 1968. [9] Г. Боде, К. Шеннон, Теория информации и ее приложения, Сборн. пер. под ред. А. А. Харкевича, М., 1959. [10] С. Голдман, Теория информации, ИЛ, 1957. [11] В. В. Петров, В. М. Агеев, В. В. Запорожец, Современные методы проектирования систем автоматического управления, Гл. 13, М., 1967.