Доклады Академии наук СССР
1971. Том 197, № 2

УДК 533.6.011.3 *ГИДРОМЕХАНИКА*

Л. С. СОЛОВЬЕВ, Ю. Н. ЯВЛИНСКИЙ

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ РАЗРЕЗОВ

(Представлено академиком Л. А. Арцимовичем 6 VIII 1970)

Винтовые волны в закрученных струях жидкостей и газов изучались в работах [1–4]. Этот вопрос представляет интерес еще и потому, что закрученные струи применяются в технических устройствах, где можно проводить некоторые эксперименты [5].

В нашей работе исследуется гидродинамическая неустойчивость цилиндрического потока идеальной жидкости. Если градиенты скорости v и плотности ρ жидкости достаточно велики, так что изменение $\mathbf{v}$ и ρ можно аппроксимировать разрывом, то решение задачи об устойчивости удается выразить через точные решения уравнений колебаний.

В системе координат, движущейся вместе с волной, винтовые волны описываются функцией тока ψ [6]

$$rv_r = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \quad v_\varphi - \alpha r v_z = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial r}, \quad v_z + \alpha r v_\varphi = I(\psi), \tag{1}$$

где r, φ, z — цилиндрические координаты.

Пусть $\psi = \psi(\xi)$, где

$$\xi = r^2/2 + f(r)\cos n\theta, \tag{2}$$

причем $\theta = \varphi - \alpha z$, $L = 2\pi/\alpha$ — шаг винта. Тогда в линейном по f приближении возмущения компонент скорости $\mathbf{v}$ выразятся через $f(r)$:

$$\tilde{v}_r = -\frac{n}{\rho r}\psi' f(r)\sin n\theta; \tag{3}$$

$$\tilde{v}_\varphi = \frac{1}{\beta}\left[\left(\alpha r I' + \frac{r}{\rho}\psi''\right) f(r) - \frac{\psi'}{\rho} f'(r)\right]\cos n\theta; \tag{4}$$

$$\tilde{v}_z = \frac{1}{\beta}\left[\left(I' + \frac{\alpha r^2}{\rho}\psi''\right) f(r) + \frac{\alpha r}{\rho}\psi' f'(r)\right]\cos n\theta. \tag{5}$$

Здесь $\beta = 1 + \alpha^2 r^2$; ψ', ψ'' и I' — функции невозмущенного потока.

Функция $f(r)$ удовлетворяет уравнению [6]

$$\left(\frac{r\rho\Omega^2}{1-q}\frac{f'}{\beta}\right)' - \left\{\frac{n^2\rho\Omega^2}{r} - \frac{4\alpha^2\rho v_\varphi^2}{r\beta} - \left(\frac{Q}{1-q}\right)' + \frac{q}{1-q}\frac{\beta Q^2}{r\rho\Omega^2}\right\} f = 0, \tag{6}$$

где введены обозначения

$$q = \frac{r^2\Omega^2}{\beta c^2}, \quad \Omega = \alpha(v_z - v_\phi) - \frac{v_\varphi}{r}, \quad Q = \frac{2\rho\Omega v_\varphi}{r\beta} + \frac{\rho v_\varphi^2}{r^2}.$$

$c = (\gamma p/\rho)^{1/2}$ — скорость звука, $v_\phi = \omega/k$ — фазовая скорость волны, $k = \alpha n$.

Если имеется разрыв на радиусе $r = a$, то интегрируя уравнение (6), получим дисперсионное уравнение для определения частоты ω

$$\frac{r}{\beta}\left[\left(\frac{\rho\Omega^2}{1-q}\frac{f'}{f}\right)_i - \left(\frac{\rho\Omega^2}{1-q}\frac{f'}{f}\right)_e\right] + \left(\frac{Q}{1-q}\right)_i - \left(\frac{Q}{1-q}\right)_e = 0, \tag{7}$$

где индексами i и e обозначены значения функций при $a-0$ и $a+0$, причем функция $f_i(r)$ удовлетворяет условию $f_i(0)=0$, а $f_e(r)$ равно нулю на некоторой цилиндрической поверхности $r=b$.

Уравнение (6) имеет точное решение при $v_z=\text{const}$, $v_\varphi=0$ в общем случае и при $v_z=\text{const}$, $v_\varphi / r=\nu_\varphi=\text{const}$ в случае несжимаемой жидкости, когда $c\to\infty$. Соответствующее решение выражается через бесселевы функции ([6])

$$f(r)=\varepsilon Z_n(\varkappa r)-\bar{\alpha}\varkappa r Z'_n(\varkappa r), \quad \varkappa^2=\varepsilon^2-\bar{\alpha}^2 n^2, \tag{8}$$

причем, в случае сжимаемой жидкости

$$\bar{\alpha}^2=\alpha^2-\Omega^2 / c^2, \quad \varepsilon=0, \tag{9}$$

а в случае несжимаемой жидкости

$$\bar{\alpha}=\alpha, \quad \varepsilon=2\alpha v_\varphi / (r\Omega). \tag{10}$$

Поскольку частота ω входит в аргументы бесселевых функций, то в общем случае уравнение (7) является трансцендентным. Однако для несжимаемой жидкости при $v_\varphi=0$ искомая частота ω определяется в явном виде. Рассмотрим этот случай более подробно.

Пусть при $r<a$ $v_z=v_i=\text{const}$, $\rho=\rho_i=\text{const}$, а при $r>a$ $v_z=v_e=\text{const}$, $\rho=\rho_e=\text{const}$ и $b\to\infty$, тогда

$$f_i(r)=C_i r I'_n(\alpha n r), \quad f_e(r)=C_e r K'_n(\alpha n r). \tag{11}$$

При этом решении дисперсионного уравнения (7) имеет вид

$$\frac{\omega}{k}=\frac{\rho_i v_i f'_i/f_i-\rho_e v_e f'_e/f_e}{\rho_i f'_i/f_i-\rho_e f'_e/f_e}\pm\sqrt{\rho_i\rho_e\frac{f'_i f'_e}{f_i f_e}\,\frac{v_i-v_e}{\rho_i f'_i/f_i-\rho_e f'_e/f_e}}, \tag{12}$$

где $f_i=f_i(a)$, $f_e=f_e(a)$. В случае длинных волн $ka\ll 1$ получаем $f'_i / f_i = n / a$, $f'_e / f_e=-n / a$.

$$\frac{\omega}{k}=\frac{\rho_i v_i+\rho_e v_e}{\rho_i+\rho_e}\pm i\sqrt{\rho_i\rho_e}\,\frac{v_i-v_e}{\rho_i+\rho_e}. \tag{13}$$

Как показывают выражения (12)—(13), рассматриваемый разрыв продольной скорости оказывается неустойчивым, причем инкремент развития этой неустойчивости при $ka\ll 1$, $\rho_i=\rho_e$ равен

$$\operatorname{Im}\omega={}^1/_2 k(v_i-v_e).$$

Следует отметить, что при $v_z=\text{const}$, $v_\varphi / r=\text{const}$, полученные решения, описываемые линейными функциями $\psi=C_1\xi$, $I=I_0+C_2\xi$, являются в случае несжимаемой жидкости точными решениями уравнений Эйлера, а линеаризация по возмущениям использована только при сшивании решений на разрыве.

Для получения точного решения задачи следовало бы сшивать решения на возмущенной границе.

В рассматриваемом случае разрыва v_z возмущения компонент скорости имеют вид

$$\tilde{v}_r=-\frac{n\alpha}{r}v_z f(r)\sin n\theta e^{i\omega t}, \quad \tilde{v}_\varphi=-\frac{\alpha}{\beta}v_z f'(r)\cos n\theta e^{i\omega t},$$

$$\tilde{v}_z=\frac{\alpha^2 r}{\beta}v_z f'(r)\cos n\theta e^{i\omega t}. \tag{14}$$

Отсюда видно, что в обоих предельных случаях аксиально-симметричных волн $\alpha\to\infty$ и азимутальных волн $\alpha\to 0$ имеем $\tilde{v}_\varphi=0$, однако в случае винтовых волн неустойчивость разрыва продольной скорости v_z приводит к появлению азимутальной скорости $\tilde{v}_\varphi$. При этом течение при $r < a$ описывается функцией тока

$$\psi = \alpha\rho v_z \frac{r^2}{2} + A_n r I_n' (\alpha n r) \cos n\theta, \tag{15}$$

где $A_n = A_n^0 e^{i\omega t}$. Интересно отметить, что полученная функция ψ в точности совпадает с функцией потока для n-заходного винтового магнитного поля ([7]).

Картина течения, описываемая функцией тока, такова: линии тока лежат на винтовых поверхностях $\psi = \mathrm{const}$ и в среднем прокручиваются вокруг оси z с угловой скоростью, пропорциональной квадрату возмущения. Усредненная угловая скорость прокручивания линий тока выражается при условии ее малости формулой ([7])

$$\left\langle \frac{d\varphi}{dz} \right\rangle = \frac{A_n^2}{4\alpha\rho^2 v_z^2} \left(\frac{d}{rdr} \right)^2 I_n^2 (\alpha n r). \tag{16}$$

При этом полный вращательный момент

$$M = \int_0^L \int_0^a \rho r v_\varphi dr\, dz,$$

как это и должно быть, сохраняется. Истинная линия тока представляет собой спираль с шагом $\lambda = L / n$ эллиптического сечения, навитую на ось, которая, в свою очередь, является винтовой линией с шагом $\Lambda = 2\pi / \langle d\varphi / dz \rangle$.

Рассмотренная здесь неустойчивость, по-видимому, может являться одним из механизмов образования вихрей.

Поступило
17 VII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Chandrasekhar, Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, Oxford, 1961. [2] L. N. Howard, A. S. Gupta, J. Fluid Mech., 14, № 3 (1962). [3] J. W. Ra-yleigh, Proc. Roy. Soc. Ser. A, 93, 148 (1916). [4] Линь Цзяо, Теория гидродина-мической устойчивости, ИЛ, 1958. [5] Ю. А. Гостинцев, Изв. АН СССР, Механи-ка жидкости и газа, № 6, 56 (1968). [6] Л. С. Соловьев, Вопросы теории плазмы, в. 3, 1963. [7] А. И. Морозов, Л. С. Соловьев, Вопросы теории плазмы, в. 2, 1963.