Доклады Академии наук СССР
1971. Том 197, № 2

УДК 517.51:519.53

МАТЕМАТИКА

И. В. ШРАГИН

УСЛОВИЯ ИЗМЕРИМОСТИ СУПЕРПОЗИЦИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 21 VIII 1970)

В различных разделах анализа встречаются суперпозиции вида $f(x, \varphi(x))$. Если для любой измеримой функции $\varphi(x)$ измерима функция $f(x, \varphi(x))$, то функция $f(x, y)$ называется [1] суперпозиционно-измеримой (сокращенно, супизмеримой). Каратеодори [5] дал простые достаточные условия супизмеримости: $f(x, y)$ при каждом y измерима по x и почти при каждом x непрерывна по y. Эти условия наиболее часто используются в приложениях [1–4]. Однако в связи с исследованиями по разрывным дифференциальным и интегральным уравнениям (см., например, [6]) возник вопрос о более общих условиях супизмеримости.

В настоящей работе из множества всех супизмеримых функций выделен класс так называемых стандартных функций. Если f — функция только от y, то ее стандартность сводится к измеримости по Борелю, хорошо известному [7] условию супизмеримости. В общем случае стандартность — это тоже вид измеримости, промежуточный между измеримостями по Борелю и Лебегу. Оказывается, свойство стандартности охватывает как все известные, так и ряд новых признаков супизмеримости. Это позволяет сделать вывод, что стандартность может служить одним из основных условий супизмеримости.

1°. Общие условия. Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ — борелевские алгебры множеств [7] с единицами X, Y, Z, соответственно.

Функция $\varphi\colon X_\varphi \to Y$, где $X_\varphi \subset X$, называется [7] $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-измеримой, если $(\forall B \in \mathfrak{B})\varphi^{-1}(B) \in \mathfrak{A}$. Через $\langle\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\rangle$ обозначим множество всех $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-измеримых функций. Подобные обозначения мы используем и в других аналогичных случаях *. Функциям $\varphi\colon X_\varphi \to Y$ сопоставим функции $F_\varphi\colon X_\varphi \to X \times Y$, $F_\varphi(x) = (x, \varphi(x))$.

Определение 1. Пусть $\Phi \subset \langle\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\rangle$. Функция $f\colon D \to Z$, где $D \subset X \times Y$, называется Φ-супизмеримой, если $\forall \varphi \in \Phi$ суперпозиция $f \circ F_\varphi \in \langle\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\rangle$.

Заметим, что функция $f \circ F_\varphi$ определена на множестве $F_\varphi^{-1}(D)$, которое может быть и пустым (в этом случае $f \circ F_\varphi \in \langle\mathfrak{A}, \mathfrak{C}\rangle$ тривиальным образом). Положим для $\Phi \subset \langle\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\rangle$

$$\mathfrak{M}(\Phi) = \{M \subset X \times Y\colon \quad (\forall \varphi \in \Phi) F_\varphi^{-1}(M) \in \mathfrak{A}\}.$$

Лемма 1. *Функция f Φ-супизмерима тогда и только тогда, когда $f \in \langle\mathfrak{M}(\Phi), \mathfrak{C}\rangle$.*

Пусть $[\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}]$ — борелевское замыкание ([7], стр. 44) системы

$$\{A \times B\colon A \subset \mathfrak{A},\ B \in \mathfrak{B}\}, \quad [\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}]_D = \{M \cap D\colon M \in [\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}]\}.$$

Лемма 2. $[\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}] \subset \mathfrak{M}(\langle\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\rangle)$.

Теорема 1. *Если $D \in \mathfrak{M}(\Phi)$ и $f \in \langle[\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}]_D, \mathfrak{C}\rangle$, то f Φ-супизмерима.*

Теорема 1 не охватывает условий супизмеримости, позволяющих пренебрегать множествами меры нуль. Этот дефект устраняется в теореме 2.

---

* Если $X = Y = Z = (-\infty, \infty)$, $\mathfrak{A}$ — система измеримых по Лебегу множеств (L-множеств), $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$ — система борелевских множеств (B-множеств) то $\langle\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\rangle = \langle\mathfrak{A}, \mathfrak{C}\rangle$ — совокупность всех измеримых по Лебегу (L-измеримых) функций.

Пусть $\mathfrak{N} = \{X' \subset X\colon (\forall A \subset X \setminus X')\, A \in \mathfrak{A}\}$. Очевидно, $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{A}$. Обозначим через $f|D'$ сужение функции $f\colon D \to Z$ на множество $D' \equiv D \cap (X' \times Y)$.

Определение 2. Функция $f\colon D \to Z$, где $D \subset X \times Y$, называется стандартной, если

$$(\exists X' \in \mathfrak{N})\, f|D' \in ([\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}]_{D'}, \mathfrak{C}).$$

Если X и Y — конечномерные евклидовы пространства, $Z = (-\infty, \infty)$, $\mathfrak{A}$ — система L-множеств в X, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ — системы B-множеств в Y и Z, D — L-множество в $X \times Y$, то, как очевидно, стандартная функция $f\colon D \to Z$ L-измерима.

Теорема 2. *Если $D \in \mathfrak{M}(\Phi)$ и функция $f\colon D \to Z$ стандартна, то она Φ-супизмерима.*

Очевидно, теорема 1 есть следствие теоремы 2. Условие $D \in \mathfrak{M}(\Phi)$ выполняется, например, когда $(\forall \varphi \in \Phi)\, F_\varphi(X_\varphi) \subset D$ или когда $D \in [\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}]$. В приложениях мы имеем дело именно с такими случаями.

Замечание 1. Рассмотрим борелевскую алгебру

$$\Delta = \{B \subset Y\colon \quad (\forall \varphi \in \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \rangle)\, \varphi^{-1}(B) \in \mathfrak{A}\}.$$

Очевидно, $\mathfrak{B} \subset \Delta$, причем, вообще говоря $\mathfrak{B} \neq \Delta$ ([7]). В то же время $[\mathfrak{A} \times \Delta] \subset \mathfrak{M}(\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \rangle)$. Отсюда вытекают аналогичные теоремам 1 и 2 более общие условия супизмеримости.

2°. Условия, использующие метрику. Пусть X и $\mathfrak{A}$ по-прежнему произвольны, Y и Z — метрические пространства, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ — системы их B-множеств ([9]). Сопоставим каждой точке $y \in Y$ некоторое содержащее y множество $B_y' \in \mathfrak{B}$, так что

$$(\forall v \in Y)\, B_v'' \equiv \{y\colon v \in B_y'\} \in \mathfrak{B}.$$

Пусть

$$S(y, \delta) = \{y'\colon \rho(y', y) < \delta\}, \quad D(x) = \{y\colon (x, y) \in D\}.$$

Определение 3. Функция $\psi\colon Y_\psi \to Z$, где $Y_\psi \subset Y$, называется B'-непрерывной в точке $y \in Y_\psi$, если $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists\, \delta > 0, \quad \{[y' \in Y_\psi \cap B_y' \cap S(y, \delta)] \Rightarrow [\psi(y') \in S(\psi(y), \varepsilon)]\}.$$

Определение 4. Множество $D \subset X \times Y$ называется B'-допустимым, если существуют такие $y_k \in Y$, $k = 1, 2, \ldots$, что

$$\forall (x, y) \in D, \quad \forall \delta > 0 \quad \exists\, y_k \in D(x) \cap B_y' \cap S(y, \delta).$$

Теорема 3. *Пусть функция $f\colon D \to Z$, где D B'-допустимо, удовлетворяет условиям:*

1) $(\forall y \in Y)\, f(\cdot, y) \in (\mathfrak{A}, \mathfrak{C})$;

2) $(\exists X' \in \mathfrak{N})\, \forall x \in X'$ *функция* $f(x, \cdot)\colon D(x) \to Z$ *B'-непрерывна на* $D(x)$.

Тогда f стандартна.

Утверждение теоремы 3 следует из равенства

$$(f|D')^{-1}(C) = D' \cap \bigcap_n \bigcup_k [(f(\cdot, y_k))^{-1}(C_n)] \times [B''_{y_k} \cap S(y_k, n^{-1})],$$

где C — замкнутое множество в Z, $C_n = \{z\colon \rho(z, C) < n^{-1}\}$, $n = 1, 2, \ldots$

Из теоремы 3, варьируя множества B_y', можно получать различные условия стандартности. Отметим два случая.

а) Если $(\forall y \in Y)\, B_y' = Y$, то условия 1) и 2) превращаются в условия Каратеодори. В этом случае Φ-супизмеримость функции $f\colon D \to [-\infty, \infty]$, где $\Phi = \{\varphi \in \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \rangle\colon F_\varphi(X_\varphi) \subset D\}$, доказана в ([10]).

б) Если $Y = [-\infty, \infty]$ и $(\forall y \in Y)\, B_y' = [y, \infty]$ $(B_y' = [-\infty, y])$, то условие 2) означает непрерывность справа (слева). Таким образом, условия Каратеодори допускают односторонние обобщения.

В ([5]), стр. 665, доказана супизмеримость функции $f(x, y^1, \ldots, y^m)$, измеримой по x и непрерывной по каждому y^i в отдельности. Это условие также охватывается теоремой 2. Действительно, имеет место

Теорема 4. *Пусть* $Y = Y^1 \times \ldots \times Y^m$, *где все* Y^i — *сепарабельные метрические пространства, и для функции* $f\colon X \times Y \to Z$ *выполнены условия*:

1) $(\forall y \in Y) f(\cdot, y) \in \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{C} \rangle$;

2) $(\exists X' \in \mathfrak{N})$ $\quad \forall x \in X'$ *функция* $f(x, \cdot)$ *непрерывна по каждому* y^i *в отдельности.*

Тогда f *стандартна.*

Доказательство теоремы 4 использует индукцию по m.

3°. Классификация типа Бэра. В ([1]), стр. 361, определены по образцу классов Бэра классы $H(\alpha)$ супизмеримых функций для всех порядковых чисел α конечной и счетной мощности. В ситуации пункта 2°, при условии, что Y сепарабельно и $D = X \times Y$, это определение выглядит так: класс $H(0)$ образуют функции, удовлетворяющие условиям Каратеодори; $f \in H(\alpha)$, $\alpha > 0$, если существуют такие $f_n \in H(\alpha_n)$, $\alpha_n < \alpha$, $n = 1, 2, \ldots$ и, такое $X' \in \mathfrak{N}$, что

$$(\forall (x, y) \in X' \times Y) f(x, y) = \lim f_n(x, y).$$

Теорема 5. *Все функции из классов* $H(\alpha)$ *стандартны.*

Это утверждение с помощью трансфинитной индукции непосредственно следует из теоремы 3 (случай а)) и следующей леммы (ср. ([9]), стр. 395), в которой Y может быть произвольным множеством.

Лемма 3. *Если функции* $f_n\colon D \to Z$, $n = 1, 2, \ldots$, *стандартны и*

$$(\exists X' \in \mathfrak{N}) \quad (\forall (x, y) \in D')\ f(x, y) = \lim f_n(x, y),$$

то и f *стандартна.*

4°. B-измеримость как условие стандартности. Пусть X и Y — топологические пространства со счетными базами; $\mathfrak{B}(X)$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}(X \times Y)$ — системы B-множеств соответственно в X, Y, $X \times Y$.

Лемма 4. *Если* $\mathfrak{B}(X) \subset \mathfrak{A}$, *то* $\mathfrak{B}(X \times Y) \subset [\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}]$.

Теорема 6. *Пусть* Z — *топологическое пространство, и* $\mathfrak{C}$ — *система его* B*-множеств.*

Тогда если $\mathfrak{B}(X) \subset \mathfrak{A}$ *и функция* $f\colon D \to Z$ B*-измерима, т. е.* $f \in \langle \mathfrak{B}(X \times Y), \mathfrak{C} \rangle$, *то она стандартна* *.

Замечание 2. Функция, удовлетворяющая условиям Каратеодори, может не быть B-измеримой. В самом деле, пусть $X = Y = Z = (-\infty, \infty)$, $\mathfrak{A}$ — система L-множеств, $E \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{B}(X)$. Тогда характеристическая функция множества $E \times Y$ является требуемым примером.

5°. Условия для вещественных функций. Пусть выполнены условия пункта 2°, причем $Z = [-\infty, \infty]$. Упорядоченность Z позволяет установить специальные условия супизмеримости для вещественных функций.

Теорема 7. *Если* D B'*-допустимо,* $f\colon D \to Z$ *и* $(\forall y \in Y)$ $\quad f(\cdot, y) \in \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{C} \rangle$, *то стандартна функция* $s = \lim\limits_{\delta \to 0} s_\delta$, *где*

$$s_\delta(x, y) = \sup \{f(x, y_k)\colon \quad y_k \in D(x) B_y' \cap S(y, \delta)\}, \qquad (x, y) \in D.$$

Доказательство. Так как $\forall c \in (-\infty, \infty)$

$$\{(x, y)\colon s_\delta(x, y) > c\} = D \cap \bigcup_k \{x\colon f(x, y_k) > c\} \times [B''_{y_k} \cap S(y_k, \delta)],$$

то $s_\delta \in \langle [\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}]_D, \mathfrak{C} \rangle$. Остается применить лемму 3.

Очевидно, sup можно заменить на inf, сохранив утверждение теоремы.

Следствие 1. *Если в условиях теоремы 7*

$$\exists X' \subset R\ (\forall (x, y) \in D')\ f(x, y) = s(x, y),$$

то f *стандартна.*

Ясно, что теорема 3, когда $Z = [-\infty, \infty]$, вытекает из следствия 1. В случае, когда $B_y' = Y$, а $\Phi = \{\varphi \in \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \rangle\colon F_\varphi(X_\varphi) \subset D\}$, Φ-супизмеримость f в условиях следствия 1 доказана в ([11]).

* В ([3]) отмечена достаточность B-измеримости для супизмеримости.

З а м е ч а н и е 3. Как показывает следующий пример, условие $f = s$ в следствии 1 нельзя заменить обычной полунепрерывностью сверху функции f по y. Пусть $X = Y = (-\infty, \infty)$; $\mathfrak{A}$ — система L-множеств; $E \subset X$, причем $E \notin \mathfrak{A}$; $f(x, y) = 0$ при $y \neq x$; $f(x, y) = 1$ при $y = x$, где $x \in E$; $f(x, y) = 2$ при $y = x$, где $x \notin E$. Тогда функция $f(x, x)$ не является L-измеримой. Этот пример показывает, что функция $f(x, y)$, L-измеримая по совокупности переменных и непрерывная почти при всех x по y, исключая конечное число точек $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, где все y_i — L-измеримые функции, может не быть супизмеримой (ср. ([1]), стр. 362).

Пусть, дополнительно к условиям, указанным в начале пункта, X и Y — конечномерные эвклидовы пространства; $\mathfrak{A}$ — система L-множеств в X; μ и ν — лебеговские меры в X и соответственно Y; $Q(y, \delta)$ — кубическая δ-окрестность точки $y \in Y$.

Т е о р е м а 8. *Если функция* f: $D \to Z$, *где* $D \subset X \times Y$, L-*измерима и* $\forall x \in X$ *существует такое открытое в* Y *множество* G_x, *что* $G_x \subset D(x) \subset \overline{G}_x$, *то стандартна функция*

$$M_\delta(x, y) = \operatorname{vrai\,max} \{f(x, \tilde{y}): \ \tilde{y} \in D(x) \cap Q(y, \delta)\}, \qquad (x, y) \in D.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как известно (([12]), стр. 379), существует такое $X' \subset X$, что $\mu(X \setminus X') = 0$ и $\forall x \in X'$ функция $f(x, \cdot)$ L-измерима (по y). Тогда $\forall c \in (-\infty, \infty)$

$$\{(x, y) \in D': \quad M_\delta(x, y) > c\} = \{(x, y) \in D': \quad \gamma_c(x, y) > 0\}, \qquad (1)$$

где $\gamma_c(x, y) = \nu\{\tilde{y} \in Q(y, \delta) \cap D(x): \ f(x, \tilde{y}) > c\}$. Далее, $\forall y \in Y$ функция $\gamma_c(\cdot, y)$ L-измерима (([12]), стр. 367), а $\forall x \in X'$ функция $\gamma_c(x, \cdot)$ непрерывна, так как

$$\gamma_c(x, y') - \gamma_c(x, y'') \,| \leqslant \nu[Q(y', \delta) \setminus Q(y'', \delta)].$$

Применяя к функции γ_c: $D' \to Z$ теорему 3 (случай а)), получаем, что

$$\{(x, y) \in D': \ \gamma_c(x, y) > 0\} \in [\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}]_{D'}.$$

Отсюда и из (1) следует утверждение теоремы.

С л е д с т в и е 2. *В условиях теоремы* 8 *стандартна функция*

$$M_f(x, y) = \lim_{\delta \to 0} M_\delta(x, y).$$

Аналогичные предложения, естественно, справедливы и для vrai min.

З а м е ч а н и е 4. Хорошо известно, что L-измеримость функции f не обеспечивает ее супизмеримость (см. замечание 3). Теорема 8 и следствие 2 показывают, как можно улучшить в этом смысле функцию. Такой прием, полезный и в других отношениях, часто используется в теории разрывных дифференциальных и интегральных уравнений (см., например, ([6])).

Сердечно благодарю М. М. Вайнберга и Д. Е. Меньшова за внимание к работе.

Тамбовский институт
химического машиностроения

Поступило
14 VIII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Красносельский, П. П. Забрейко и др., Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, М., 1966. [2] М. М. Вайнберг, Вариационные методы исследования нелинейных операторов, М., 1956. [3] Б. Т. Поляк, Матем. сборн., 78, № 1 (1969). [4] И. В. Шрагин, ДАН, 189, № 1 (1969). [5] K. Carathéodory, Vorlesungen uber reelle Funktionen, 1927. [6] Н. В. Азбелев, Р. К. Рагимханов, Л. Н. Фадеева, Диффер. уравнения, 5, № 5 (1969). [7] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, Элементы теория функций и функционального анализа, М., 1968. [8] R. O. Davies, Proc. Cambridge Phil. Soc., 65, N 2, 437 (1969). [9] К. Куратовский, Топология, 1, М., 1966. [10] И. В. Шрагин, Матем. исслед. АН МолдССР, 3, в. 1 (1968). [11] И. В. Шрагин, Тр. Тамбовск. инст. хим. машиностр., в. 3, 7 (1969). [12] И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, М., 1957.