Доклады Академии наук СССР
1970. Том 195, № 4

УДК 517.946.9 *МАТЕМАТИКА*

В. Р. ПОРТНОВ

О ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С ВЕСОВЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 6 V 1970)

1°. Введение. Вопрос об изучении краевых задач для эллиптических уравнений в классе неограниченных решений был поставлен А. В. Бицадзе ([1]): требуется найти регулярное в области решение, которое с некоторым весом, стремящимся к нулю при подходе к границе или ее части, удовлетворяет поставленным краевым условиям. Такого рода краевые задачи для уравнений второго порядка исследовались в работах ([2–4]) и др. В настоящей заметке изучается первая краевая задача с весовыми граничными условиями для вырождающихся эллиптических уравнений высших порядков в ограниченной области.

2°. Основные обозначения и определения. E_n — n-мерное эвклидово пространство точек $x=(x_1, \ldots, x_n)$; $E_n^+ = \{x: x_n > 0\}$; $E_{n-1} = \{x: x_n = 0\}$; $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$; Ω — область в E_n, обладающая следующим свойством: $\Omega = E_n^+ \cap \Delta$, где Δ — такая ограниченная область в E_n, граница которой Σ представляет собой замкнутую $(n-1)$-мерную поверхность порядка гладкости $m+1$, $m \geqslant 1$ и для которой $\Delta \cap E_{n-1} \neq \phi$; $\Gamma_0 = \Delta \cap E_{n-1}$; $\Gamma_1 = \Sigma \cap E_n^+$; Γ_0' — проекция Ω на E_{n-1}; мультииндекс $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ применяется для обозначения дифференцирования только по переменным набора x': $D_{x'}^\alpha$.

В дальнейшем нам понадобятся функциональные пространства V и $\mathring{V}$.

Определение 1. Пространством V назовем совокупность всех таких функций u, определенных в области Ω, у которых существуют обобщенные в смысле С. Л. Соболева производные порядка m, и

$$p(u) = \Big(\sum_{k=1}^{R} \sum_{|\alpha| \leqslant m_k} \| \mathfrak{L}_k^{(\alpha)} u \|^2_{L_{q_k}(\Omega)}\Big)^{1/2} < \infty. \tag{1}$$

В полунорме $p(u)$: 1) R, m_k — натуральные числа; 2) $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant R} m_k = m$; 3) $1 < q_k < \infty$; 4) $\mathfrak{L}_k^{(\alpha)}$ — дифференциальный оператор вида

$$\mathfrak{L}_k^{(\alpha)} = P_{k,0}^{(\alpha)} P_{k,1}^{(\alpha)} \ldots P_{k,m_k-|\alpha|-1}^{(\alpha)} P_{k,m_k-|\alpha|}^{(\alpha)},$$

где $P_{k,m_k-|\alpha|}^{(\alpha)} = x_n^{\gamma_{k,m_k-|\alpha|}^{(\alpha)}(x')} D_{x'}^\alpha$, $P_{k,j}^{(\alpha)} = x_n^{\gamma_{k,j}^{(\alpha)}(x')} \partial/\partial x_n$ при $|\alpha| < m_k$, $0 \leqslant j < m_k - |\alpha|$; 5) функции $\gamma_{k,j}^{(\alpha)}(x')$ определены на Γ_0', измеримы и ограничены.

Положим $\mu_{k,j}^{(\alpha)}(x') = -j + \gamma_{k,0}^{(\alpha)}(x') + \ldots + \gamma_{k,j-1}^{(\alpha)}(x')$, $|\alpha| < m_k$, $1 \leqslant j \leqslant m_k - |\alpha|$, и будем предполагать для простоты дальнейших формулировок, что выполнено следующее

Условие 1. В случае, когда $|\alpha| < m_k - 1$, существует такое $\varepsilon > 0$, что для любых j_1 и j_2, удовлетворяющих неравенствам $j_1 \neq j_2$, $1 \leqslant j_1 \leqslant m_k - |\alpha|$, $1 \leqslant j_2 \leqslant m_k - |\alpha|$, справедливо соотношение

$$\operatorname{mes}(\{x' \in \Gamma_0 : |\mu_{k,j_1}^{(\alpha)}(x') + q_k^{-1}| < \varepsilon\} \cap \{x' \in \Gamma_0 : |\mu_{k,j_2}^{(\alpha)}(x') + q_k^{-1}| < \varepsilon\}) = 0.$$

Пусть $\Gamma_{k,j}^{(\alpha)} = \{x' \in \Gamma_0 : \mu_{k,j}^{(\alpha)}(x') < -q_k^{-1}\}$, $1 \leqslant j \leqslant m_k - |\alpha|$, $|\alpha| < m_k$. Пусть, далее, $\mathfrak{L}_{k,j}^{(\alpha)} = P_{k,j}^{(\alpha)} P_{k,j+1}^{(\alpha)} \ldots P_{k,m_k-|\alpha|}^{(\alpha)}$, $0 \leqslant j \leqslant m_k - |\alpha|$, $|\alpha| \leqslant m_k$, так что $\mathfrak{L}_k^{(\alpha)} = \mathfrak{L}_{k,0}^{(\alpha)}$.

Если на множестве $\Gamma_{k,j}^{(\alpha)}$ задана функция $\psi_{k,j}^{(\alpha)}(x')$ и если для функции $u \in V$ после возможного изменения функции $\mathfrak{L}_{k,j}^{(\alpha)} u$ на множестве меры нуль в Ω для почти всех $x' \in \Gamma_{k,j}^{(\alpha)}$ выполнено равенство $\lim\limits_{x_n \to 0} \mathfrak{L}_{k,j}^{(\alpha)} u(x', x_n) = \psi_{k,j}^{(\alpha)}(x')$, то будем писать

$$\mathfrak{L}_{k,j}^{(\alpha)} u \big|_{\Gamma_{k,j}^{(\alpha)}} = \psi_{k,j}^{(\alpha)}(x'). \tag{2}$$

Определение 2. Пространством $\mathring{V}$ назовем совокупность всех таких функций $u \in \mathring{V}$, для которых

$$\mathfrak{L}_{k,j}^{(\alpha)} u \big|_{\Gamma_{k,j}^{(\alpha)}} = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant m_k - |\alpha|,\ |\alpha| < m_k,\ 1 \leqslant k \leqslant R, \tag{3}$$

и, кроме того, $\partial^\nu u / \partial N^\nu |_{\Gamma_1} = 0$, $\nu = 0, \ldots, m-1$, где N — нормаль к многообразию Γ_1.

Замечание. Ясно, что если $\operatorname{mes} \Gamma_{k,j}^{(\alpha)} = 0$ для всех $j = 1, \ldots \ldots, m_k - |\alpha|$, $|\alpha| < m_k$, $k = 1, \ldots R$, то $\mathring{V} = \{u \in V : \partial^\nu u / \partial N^\nu |_{\Gamma_1} = 0$, $\nu = 0, \ldots, m-1\}$. Пространство $\mathring{V}$ мы будем в дальнейшем рассматривать как нормированное пространство с нормой $p(u)$.

3°. Свойства пространства $\mathring{V}$.

Теорема 1. *Пусть* $1 \leqslant j \leqslant m_k - |\alpha|$, $|\alpha| < m_k$, $1 \leqslant k \leqslant R$. *Тогда для всех* $u \in \mathring{V}$ *справедливо неравенство*

$$\| x_n^{\mu_{k,j}^{(\alpha)}(x')} \ln^{-1}(1 + x_n^{-1}) \mathfrak{L}_{k,j}^{(\alpha)} u \|_{L_{q_k}(\Omega)} \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant m_k} \| \mathfrak{L}_k^{(\alpha)} u \|_{L_{q_k}(\Omega)}, \tag{4}$$

где C — константа, не зависящая от u. Если, кроме того, $\varphi(x_n)$ — ограниченная измеримая функция такая, что $\lim\limits_{x_n \to 0} \varphi(x_n) = 0$, *что оператор*

$$A = \varphi(x_n) x_n^{\mu_{k,j}^{(\alpha)}(x')} \ln^{-1}(1 + x_n^{-1}) \mathfrak{L}_{k,j}^{(\alpha)}$$

действует из пространства $\mathring{V}$ в пространство $L_{q_k}(\Omega)$ и вполне непрерывен.

Замечание. Теорема 1 может быть усилена, однако при этом формулировка ее становится более громоздкой.

Теорема 2. *Пространство $\mathring{V}$ является рефлексивным сепарабельным пространством Банаха, и множество $C_0^{(\infty)}(\Omega)$ плотно в пространстве $\mathring{V}$.*

Доказательство неравенства (4) проводится с помощью последовательного применения обобщенного неравенства Харди (см., например, [5]), при этом используется условие 1. Полная непрерывность оператора A доказывается следующим образом. При любом $\delta > 0$ оператор $A_\delta = \varkappa_\delta(x) A$, где $\varkappa_\delta(x) = 1$, если $x_n > \delta$, и $\varkappa_\delta(x) = 0$, если $x_n \leqslant \delta$, вполне непрерывен в силу теоремы В. И. Кондрашова [6]. Далее из неравенства (4) и условия $\lim\limits_{x_n \to 0} \varphi(x_n) = 0$ вытекает, что $\|A - A_\delta\| \to 0$ при $\delta \to 0$, и, следовательно, оператор A вполне непрерывен.

Сепарабельность пространства $\mathring{V}$ очевидна. Рефлексивность же является следствием полноты, поскольку единичная сфера в $\mathring{V}$ равномерно выпукла. Чтобы доказать полноту $\mathring{V}$, рассматриваем произвольную фундаментальную последовательность $\{u_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$ Стандартным способом доказывается существование такой функции $u \in V$, у которой $\partial^\nu u / \partial N^\nu |_{\Gamma_1} = 0$, $\nu = 0, \ldots, m-1$, причем $\lim\limits_{k \to \infty} p(u - u_k) = 0$. Далее, тот факт, что для u выполнены соотношения (3), устанавливается с помощью неравенства (4).

Плотность множества $C_0^{(\infty)}(\Omega)$ в $\overset{\circ}{V}$ доказывается на основе неравенства (4) методом срезывающих функций, принадлежащим С. Л. Соболеву.

4°. Первая краевая задача для вырождающихся эллиптических уравнений. В этом пункте мы ограничимся рассмотрением первой краевой задачи для линейных эллиптических уравнений. Однако, используя теорию Вишика — Браудера, можно было бы получить на основе теорем 1 и 2 результаты о разрешимости и об однозначной разрешимости первой краевой задачи для квазилинейных уравнений эллиптического типа.

Будем считать, что $q_1 = q_2 = \ldots = q_R = 2$, т. е. что $\overset{\circ}{V}$ является гильбертовым пространством, и введем следующее обозначение. Пусть $0 \leqslant j \leqslant m_k - |\alpha|$, $|\alpha| \leqslant m_k$, $1 \leqslant k \leqslant R$. Положим

$$\mathfrak{L}_{k,j}^{(\alpha)*} = P_{k,m_k-|\alpha|}^{(\alpha)*} P_{k,m_k-|\alpha|-1}^{(\alpha)*} \ldots P_{k,j+1}^{(\alpha)*} P_{k,j}^{(\alpha)*},$$

где $P_{k,j}^{(\alpha)*} u = -\dfrac{\partial}{\partial x_n} x_n^{\gamma_{k,j}^{(\alpha)}(x')} u$ при $|\alpha| < m_k$, $0 \leqslant j < m_k - |\alpha|$, и

$$P_{k,m_k-|\alpha|}^{(\alpha)*} u = (-1)^{|\alpha|} D_{x'}^{\alpha} x_n^{\gamma_{k,m_k-|\alpha|}^{(\alpha)}(x')} u.$$

Например, $\mathfrak{L}_k^{(\alpha)*} = \mathfrak{L}_{k,0}^{(\alpha)*} = P_{k,m_k-|\alpha|}^{(\alpha)*} \ldots P_{k,0}^{(\alpha)*}$.

Для удобства записи перенумеруем всю совокупность операторов $\{\mathfrak{L}_{k,j}^{(\alpha)}\}$, $0 \leqslant j \leqslant m_k - |\alpha|$, $|\alpha| \leqslant m_k$, $1 \leqslant k \leqslant R$, с помощью одного индекса: $\mathfrak{L}_1, \ldots, \mathfrak{L}_{T_0}, \ldots, \mathfrak{L}_T$ так, чтобы оператор $\mathfrak{L}_{k,j}^{(\alpha)}$ имел номер $\leqslant T_0$ при $j = 0$ и $> T_0$ при $j > 0$. Далее, каждому оператору $\mathfrak{L}_i$, $1 \leqslant i \leqslant T$, сопоставим функцию $b_i(x)$ по следующему правилу: пусть $\mathfrak{L}_i = \mathfrak{L}_{k,j}^{(\alpha)}$, тогда

$$b_i(x) \equiv 1, \text{ если } j = 0, \text{ и } \qquad b_i(x) = x_n^{\mu_{k,j}^{(\alpha)}(x')} \ln^{-1}(1 + x_n^{-1}), \qquad \text{если } j > 0.$$

Введем следующие дифференциальные операторы:

$$L_1 u = \sum_{i,s=1}^{T} \mathfrak{L}_s^* (a_{is}^{(1)}(x) \mathfrak{L}_i u), \quad L_2 u = \sum_{i,s=1}^{T} \mathfrak{L}_s^* (a_{is}^{(2)}(x) \mathfrak{L}_i u),$$

$$Lu = L_1 u + L_2 u, \quad L^* u = \sum_{i,s=1}^{T} \mathfrak{L}_i^* ((a_{is}^{(1)}(x) + a_{is}^{(2)}(x)) \mathfrak{L}_s u).$$

Пусть выполнены следующие условия: 1) $|a_{is}^{(1)}(x)| + |a_{is}^{(2)}(x)| \leqslant$ $\leqslant C b_i(x) b_s(x)$; 2) $a_{is}^{(2)}(x) \equiv 0$ при $\max(i, s) \leqslant T_0$; 3) $\lim\limits_{\delta \to 0} \sup\limits_{x_n < \delta} (|a_{is}^{(2)}(x)| \times$ $\times b_i^{-1}(x) b_s^{-1}(x)) = 0$; 4) $\sum\limits_{i,s=1}^{T} a_{is}^{(1)}(x) t_i t_s \geqslant \varepsilon_0 \sum\limits_{i=1}^{T_0} t_i^2$, $\varepsilon_0 > 0$.

Положим

$$\tilde{V} = \left\{ u \in V : \sum_{i,s=1}^{T} |(a_{is}^{(1)}(x) + a_{is}^{(2)}(x)) b_s^{-1}(x) \mathfrak{L}_i u| \in L_2(\Omega) \right\},$$

$$\mathfrak{M}(u, v) = \sum_{i,s=1}^{T} \int_{\Omega} (a_{is}^{(1)}(x) + a_{is}^{(2)}(x)) \mathfrak{L}_i u \mathfrak{L}_s v \, dx, \quad u \in \tilde{V}, \ v \in \overset{\circ}{V}.$$

Рассмотрим уравнение

$$Lu = f, \quad f \in \overset{\circ}{V}{}^*, \tag{5}$$

и первую краевую задачу для него

$$\mathfrak{L}_{k,j}^{(\alpha)} u \big|_{\Gamma_{k,j}^{(\alpha)}} = \psi_{k,j}^{(\alpha)}(x'), \quad 1 \leqslant j \leqslant m_k - |\alpha|, \ |\alpha| < m_k, \ 1 \leqslant k \leqslant R,$$

$$\partial^\nu u / \partial N^\nu|_{\Gamma_1} = \psi_\nu(\omega), \quad \omega \in \Gamma_1, \quad \nu = 0, \ldots, m-1. \tag{6}$$

Обозначим через $\mathfrak{A}$ совокупность краевых условий (6). Множество функций $u \in \overset{\circ}{V}$, удовлетворяющих условиям (6), обозначим через $\overset{\circ}{V}_{\mathfrak{A}}$.

Определение 3. Функцию u назовем обобщенным решением (о. р.) уравнения (5), если $u \in \overset{\circ}{V}$ и $\mathfrak{M}(u, v) = \langle f, v\rangle$, $\forall v \in C_0^{(\infty)}(\Omega)$. Аналогично определяется о. р. уравнений $L^*u = 0$ и $L_2u = 0$. Функцию u будем называть о. р. первой краевой задачи (6) для уравнения (5), если u есть о. р. уравнения (5) и $u \in \overset{\circ}{V}_{\mathfrak{A}}$.

Обозначим через S, S^* и S_2 совокупности о. р. уравнений $Lu = 0$, $L^*u = 0$ и $L_2u = 0$ соответственно, принадлежащих пространству $\overset{\circ}{V}$.

Определение 4. Пусть $\overset{\circ}{V}_{\mathfrak{A}} \neq \phi$. Если $\mathfrak{M}(u, v) = \langle f, v\rangle$, $\forall v \in S^*$ и $\forall u \in \overset{\circ}{V}_{\mathfrak{A}}$, то мы будем писать $\{\mathfrak{A}, f\} \perp S^*$.

Следующие теоремы являются следствием теорем 1, 2 и теории линейных операторов в гильбертовом пространстве.

Теорема 3. $\dim S = \dim S^* < \infty$.

Теорема 4. *Пусть $\overset{\circ}{V}_{\mathfrak{A}} \neq \phi$. Тогда о. р. первой краевой задачи* (6) *для уравнения* (5) *в пространстве $\overset{\circ}{V}$ существует в том и только в том случае, если $\{\mathfrak{A}, f\} \perp S^*$.*

Теорема 5. *Пусть $a_{is}^{(2)}(x) \equiv 0$, $\forall i, s = 1, \ldots, T$. Пусть $\overset{\circ}{V}_{\mathfrak{A}} \neq \phi$. Тогда в пространстве $\overset{\circ}{V}$ существует единственное о. р. первой краевой задачи* (6) *для уравнения* (5) *при любой правой части $f \in \overset{\circ}{V}^*$.*

Теорема 6. *Если $a_{is}^{(1)}(x) = a_{si}^{(1)}(x)$, $a_{is}^{(2)}(x) = a_{si}^{(2)}(x)$, $\forall i, s = 1, \ldots, T$, и $S_2 \neq \overset{\circ}{V}$, то задача на собственные значения $L_1u - \lambda L_2u = 0$, $u \in \overset{\circ}{V}$, приводит к вещественному дискретному и конечнократному спектру с единственной возможной точкой сгущения на бесконечности, при этом соответствующая система собственных функций образует ортогональный базис в пространстве $\overset{\circ}{V} \ominus S_2$.*

Замечание. Многие конкретные уравнения допускают, вообще говоря, несколько записей в форме (5), а это означает, что для них существует несколько пространств типа V и краевых задач вида (6), соответствующих этим пространствам. Приведем простой пример ($R = 1$, $m = 2$).

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} x_n^{\gamma_{ij}(x')} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \tag{7}$$

функция $\gamma_{ij}(x')$ измерима на Γ_0' и $\sup\limits_{x' \in \Gamma_0'} |\gamma_{ij}(x')| < \infty$. Ограничимся здесь указанием 4 форм, в которых может быть записан оператор L

$$Lu = x_n^\omega \frac{\partial}{\partial x_n} x_n^\sigma \frac{\partial}{\partial x_n} x_n^\nu \frac{\partial}{\partial x_n} x_n^\sigma \frac{\partial}{\partial x_n} x_n^\omega u + \sum_{i+j<2n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} x_n^{\gamma_{ij}(x')} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j};$$

1) $\omega = \sigma = 0$, $\nu = \gamma_{nn}(x')$; 2) $\omega = 0$, $\sigma = \gamma_{nn}(x') - 1$, $\nu = 2 - \gamma_{nn}(x')$; 3) $\omega = \gamma_{nn}(x') - 3$, $\sigma = 3 - \gamma_{nn}(x')$, $\nu = \gamma_{nn}(x')$; 4) $\omega = \gamma_{nn}(x') - 2$, $\sigma = 0$, $\nu = 4 - \gamma_{nn}(x')$;

$$p(u) = \left(\left\| x_n^{\nu/2} \frac{\partial}{\partial x_n} x_n^\sigma \frac{\partial}{\partial x_n} x_n^\omega u \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \sum_{i+j<2} \left\| x_n^{\gamma_{ij}(x')/2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}. \tag{8}$$

Условие 1 выполнено, поэтому во всех 4 случаях краевые задачи вида (6) для уравнения (7) ставятся так, как было указано выше, и решаются в пространствах типа V, определяемых полунормами (8).

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
27 III 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. В. Бицадзе, Уравнения смешанного типа, Изд. АН СССР, 1959. [2] С. А. Терсенов, ДАН, 115, № 4, 670 (1957). [3] А. А. Вашарин, П. И. Лизоркин, ДАН, 137, № 5, 1015 (1961). [4] Г. Н. Яковлев, Дифференциальн. уравн., 4, № 1, 147 (1968). [5] В. Р. Портнов, ДАН, 155, № 4, 761 (1964). [6] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950.