Доклады Академии наук СССР
1971. Том 197, № 2

УДК 517.946 *МАТЕМАТИКА*

С. Д. ЭЙДЕЛЬМАН, Ф. О. ПОРПЕР

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 7 VIII 1970)

Работа посвящена изучению поведения решений параболических систем с диссипацией, введенных одним из авторов ([1]), в полупространстве $t>0$.

На основании полученных оценок фундаментальной матрицы решений (ф.м.р.) изучается поведение решения задачи Коши, представимого интегралом Пуассона, при увеличении времени как вектор-функции пространственных координат (в равномерных нормах). Далее, для систем второго порядка в интегральных нормах изучается поведение решения как вектор-функции пространственных координат и времени. Аналогичное исследование проводится для систем любого порядка в случае одной пространственной переменной. Наконец, приводятся точные результаты для одного уравнения второго порядка, основанные на специальном обобщении классического принципа максимума.

Мысль о проведении настоящего исследования возникла у авторов при изучении интересных работ ([3], [4]) Обозначения такие же, как в ([1]).

1. Задача Коши. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \sum_{|m|\leqslant 2b} A_m(t, x) D^m u(t, x), \tag{1}$$

$0<t<\infty$, $-\infty<x_j<\infty$, $j=1, 2, \ldots, n$; $x=(x_1, \ldots, x_n)$; $D=\frac{1}{i}D_x$.

Перечислим условия на коэффициенты:

Б$_1$. $|D^k A_m(t, x)| \leqslant Cf(x)^{2b-|m|+|k|(1-\varepsilon)}$, $|k| \leqslant 2b$, причем все эти производные непрерывны и удовлетворяют локально условию Гёльдера по x при $t\geqslant 0$.

Б$_2$. $B_m(t, x) = A_m(t, x) f(x)^{|m|-2b}$ непрерывны по t равномерно относительно $t\in[0, \infty)$ и $x\in E_n$.

Б$_3$. Уравнение (диссипации)

$$\det\Big\{\sum_{|m|\leqslant 2b} B_m(t, x)\sigma^m \mu^{2b-|m|} - \lambda I\Big\} = 0$$

имеет корни λ, для которых $\operatorname{Re}\lambda < -\delta$, $\delta>0$, при любых вещественных $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \mu$, удовлетворяющих равенству $\sigma_1^2+\sigma_2^2+\ldots+\sigma_n^2+\mu^2=1$. Здесь функция $f(x)$, называемая характеристикой диссипации, непрерывна и удовлетворяет неравенству $f(x)\geqslant 1$.

Вместо условия Б$_1$ можно принять следующий набор условий ([5]):

Г$_1$. $|A_m(t, x)| \leqslant Cf(x)^{2b-|m|}$.

Г$_2$. $|A_m(t, x) - A_m(t, \xi)| \leqslant C|x-\xi|^\varepsilon f(\xi)^{2b-|m|}$, $|x-\xi|\leqslant 1$.

Г$_3$. $f(x) \leqslant C(\alpha_1)e^{\alpha_1|x-\xi|f(\xi)}$, $|x-\xi|\geqslant 1$, α_1 — сколь угодно малое положительное число.

Г$_4$. $f(x)\leqslant Cf(\xi)$, $|x-\xi|\leqslant 1$.

Теорема 1. *Если выполнены условия* $Б_1$, $Б_2$, $Б_3$ *или* $Г_1$, $Г_2$, $Г_3$, $Б_2$, $Б_3$, *то у системы* (1) *есть ф.м.р.* $Z(t, \tau, x, \xi)$, *для которой справедливы оценки*

$$|D^m Z(t, \tau, x, \xi)| \leqslant C_m e^{A(t-\tau)} (t-\tau)^{-(n+|m|)/2b} \exp\left[-c\left(\frac{|x-\xi|^{2b}}{t-\tau}\right)^{1/(2b-1)}\right], \quad (2)$$

$$|m| \leqslant 2b, \quad 0 \leqslant \tau < t < \infty, \quad A > 0, \; c > 0.$$

Доказательство теоремы 1 проводится так же, как доказательства теорем 3.1 и 2.1 в [1].

Поведение решения как вектор-функции пространственных координат. Рассмотрим решение системы (1), представимое интегралом Пуассона

$$u(t, x) = \int Z(t, 0, x, \xi)\, u(0, \xi)\, d\xi. \quad (3)$$

Для получения основного результата сделаем в системе (1) замену

$$u(t, x) = v(t, x)\, e^{G(t, x)}, \quad (4)$$

где $G(t, x) = -\eta \operatorname{th} \alpha (t - T_0) \cdot g(x) - \eta_1 t$, η, α и η_1 — положительные постоянные, T_0 — постоянная любого знака, $g(x) \geqslant 0$, $\lim\limits_{|x| \to \infty} g(x) = \infty$; кроме того, для $g(x)$ рассмотрим два набора условий.

$Б_4$. $g(x)$ имеет $4b$ непрерывных производных, удовлетворяющих локально условию Гёльдера, для которых справедливы оценки

$$g(x) \leqslant C f(x)^{2b}, \quad |D^k g(x)| \leqslant C f(x)^{|k|(1-\varepsilon)+\varepsilon}, \quad 0 < |k| \leqslant 4b;$$

или

$Г_5$. $g(x)$ имеет $2b$ непрерывных производных, для которых справедливы оценки

$$g(x) \leqslant C f(x)^{2b}, \quad |D^k g(x)| \leqslant C f(x)^{|k|}, \quad 0 < |k| \leqslant 2b.$$

$Г_6$. $$|g(x) - g(\xi)| \leqslant C|x-\xi|^{\varepsilon} f(\xi)^{2b}, \quad |x-\xi| \leqslant 1,$$

$$|D_x^k g(x) - D_\xi^k g(\xi)| \leqslant C|x-\xi|^{\varepsilon} f(\xi)^{|k|}, \quad |x-\xi| \leqslant 1, \quad 0 < |k| \leqslant 2b.$$

Применяя к решению преобразованной системы, представимому интегралом Пуассона, теорему 1, получим следующее основное утверждение.

Теорема 2. *Если для системы* (1) *и функции* $g(x)$ *выполняются условия* $Б_1 - Б_4$ *или условия* $Г_1 - Г_6$, $Б_2$, $Б_3$, *то для решения, представимого интегралом Пуассона* (3), *справедлива оценка*

$$|u(t, x)| \leqslant C_0' \sup_\xi [\,|u(0, \xi)|\, e^{-\eta \operatorname{th} \alpha T_0 \cdot g(\xi)}] \cdot \exp[-\eta \operatorname{th} \alpha (t - T_0) \cdot g(x) + (A - \eta_1) t],$$

где η, η_1, α, A, C_0' — *положительные постоянные, определяемые системой* (1) *и функцией* $g(x)$.

Теорема 2 показывает, что если решение, представимое интегралом Пуассона, определенным образом растет в начальный момент, то с течением времени оно становится убывающим по x при $|x| \to \infty$.

3. L_2-оценки. Здесь изучается поведение решения в L_2-норме с весом как функции времени t. С помощью преобразования (4) и L_2-варианта интегрального принципа максимума [2] приходим к утверждению.

Теорема 3. *Пусть коэффициенты системы*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(t, x) \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} A_i(t, x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + A(t, x) u \quad (5)$$

вещественны и удовлетворяют условиям $Б_1 - Б_3$ *или же* $Г_1 - Г_4$, $Б_2$, $Б_3$, *а функция $g(x)$ — условиям* Б$_4$ *или* Г$_5$, Г$_6$ *соответственно. Квадратическая форма*

$$(\mathscr{E}c,\ c) \equiv -\sum_{i,\,j=1}^{n} (B_{ij}(t,\ x)\, a_i,\ a_j) + \sum_{i=1}^{n} (B_i(t,\ x)\, a_i,\ b) + (B(t,\ x)\, b,\ b),$$

$$B_{ij} = A_{ij},\quad B_i = A_i/f(x),\quad B = A/f(x)^2,$$

$c = (a_1,\ a_2, \ldots, a_n,\ b)$ — *отрицательно определенная*: $(\mathscr{E}c,\ c) \leqslant -\delta(c,\ c)$, $\delta > 0$.

Тогда найдутся достаточно малые положительные постоянные η, α *и* η_1 *такие, что для решения* $u(t,\ x)$, *представимого в виде* (3), *имеет место оценка*

$$\int |u(t,\ x)|^2 e^{2\eta\, \mathrm{th}\, \alpha\, (t-T_0)\cdot g\,(x)}\, dx \leqslant e^{-2\eta_1 t} \int |u(0,\ x)|^2 e^{-2\eta\, \mathrm{th}\, \alpha\, T_0 \cdot g\,(x)}\, dx, \qquad (6)$$

$0 < t < \infty$.

Для системы (1) с одной пространственной координатой с помощью специальных интерполяционных неравенств в пространствах L_2 с весом устанавливается

Теорема 4. *Пусть для системы*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{m=0}^{2b} A_m(t,\ x) \frac{\partial^m u}{\partial x^m}, \qquad (1)$$

где $A_m(t,\ x)$ — вещественные симметричные матрицы, выполнены условия Б$_1$ — Б$_3$ *и неравенство*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\varphi(x),\ \sum_{m=0}^{2b} A_m(t,\ x) \frac{d^m \varphi(x)}{dx^m}\right) dx \leqslant$$

$$\leqslant -\delta_1 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d^b \varphi(x)}{dx^b} \right|^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} f(x)^{2b}\, |\varphi(x)|^2\, dx \right\}, \qquad (7)$$

$\delta_1 > 0$, $\varphi(x)$ — *любая $2b$ раз непрерывно дифференцируемая вектор-функция, для которой указанные интегралы сходятся, причем внеинтегральные члены, возникающие при интегрировании по частям в левой части* (7), *равны нулю*; $g(x)$ *удовлетворяет условиям* Б$_4$; $f(x)$ — *четная монотонно возрастающая при $x > 0$ функция*; $f(x)\, e^{-\varepsilon g(x)} \leqslant C(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$; *функция* $h(x)$, *обратная к которой* $h^{-1}(y) = \int_{f(0)}^{y} y \frac{d}{dy} f^{-1}(y)\, dy$, *обладает свойством* $\sup_{n,\,\varepsilon} [h((n+1)\varepsilon)\ /\ h(n\varepsilon)] = \gamma < +\infty$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Тогда решение (1′), *представимое в виде* (3), *удовлетворяет неравенству* (6).

4. Уравнение второго порядка. Оценки в норме *C*. Рассмотрим равномерно параболическое уравнение с вещественными непрерывными коэффициентами

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}(t,\ x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,\ x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(t,\ x)\, u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \qquad (8)$$

Совершая преобразование (4) и применяя к преобразованному уравнению специальный вариант принципа максимума, приходим к неравенству

$$|u(t,\ x)| \leqslant \sup_{\xi} \{ |u(0,\ \xi)|\, e^{-\eta\, \mathrm{th}\, \alpha\, T_0 \cdot g\,(\xi)} \}\, e^{-\eta\, \mathrm{th}\, \alpha\, (t-T_0)\cdot g\,(x) - \eta_1 t} \qquad (9)$$

для решений, удовлетворяющих оценке

$$|u(t,\ x)| \leqslant B_T e^{\beta g(x)},\quad 0 \leqslant t \leqslant T, \qquad (10)$$

T — произвольно при различных предположениях о коэффициентах уравнения (8); в частности, неравенство (9) имеет место, если

$$|a_{ij}(t,\ x)| \leqslant C, \quad |b_i(t,\ x)| \leqslant Cf(x), \quad c(t,\ x) \leqslant -\delta f(x)^2, \quad \delta > 0,$$

а положительные постоянные η, α и η_1 достаточно малы. Впрочем, последние условия весьма грубы. Может быть выписана серия труднее обозримых условий, неулучшаемость которых показывается простыми примерами.

Так, уравнение

$$\partial^2 u / \partial x^2 - [m^2 x^{2m-2} + 2m^2(m-1)x^m + m(m-1)x^{m-2} + \\ + m^2(m-1)^2 x^2 + m(m-1)]u - \partial u / \partial t = 0 \tag{11}$$

имеет стационарное решение $u_1(x) = e^{x^m + \frac{1}{2}m(m-1)x^2}$. В то же время неравенство (9) имеет место для любого решения, удовлетворяющего оценке (10) при $g(x) = x^m + \frac{m(m-1)}{2}x^2$, если только $\beta < 1$. В этом случае нужно брать $\beta < \eta < 1$ и α достаточно малым. Тогда $\eta_1 = (1-\eta)m(m-1)$ и T_0 выбирается таким образом, чтобы $\eta \operatorname{th} \alpha T_0 = \beta$.

Киевское высшее инженерное радиотехническое училище
Воронежский политехнический институт

Поступило
3 VIII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Д. Эйдельман, Параболические системы, М., 1964. [2] С. Д. Эйдельман, Изв. высш. учебн. завед., Математика, 2 (9), 252 (1959). [3] Takaši Kusano, Funkcialaj Ekvacioj, 11, 169 (1968). [4] Takaši, Kusano, Funkcialaj Ekvacioj, 11, 197 (1968). [5] А. Г. Костюченко, ДАН, 158, № 1, 41 (1964).