Доклады Академии наук СССР
1970. Том 195, № 4

УДК 539.376 ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

М. И. РОЗОВСКИЙ, Н. Н. ДОЛИНИНА

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗОНЫ ПЛАСТИЧНОСТИ ПРИ ПОСЛЕДЕЙСТВИИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ТЕЛ С ЦЕНТРАЛЬНОЙ И ОСЕВОЙ СИММЕТРИЕЙ

(Представлено академиком Ю. Н. Работновым 8 VI 1970)

Рассмотрим полый шар наружного радиуса b и внутреннего a, находящийся под действием наружного q $(q > 0)$ и внутреннего p $(p > 0)$ равномерного давления. Пусть под влиянием заданной системы сил в шаре возникает в момент $t = 0$ пластическая зона, целиком охватывающая его внутреннюю поверхность. Так как принимается, что материал шара обладает упруго-пластическими свойствами с последействием, то радиус пластической зоны с упрочнением $R(t)$ при $t > 0$ будет изменяться во времени.

Исследуем величину $R(t)$ как функцию времени t.

Будем исходить из физического уравнения вида

$$\sigma_i = 3a_{2t}\varepsilon_i[1 - \omega(\varepsilon_i)], \tag{1}$$

где σ_i и ε_i — интенсивности напряжений и деформаций соответственно ([1]), $a_{2t} = a_{20}(1 - R_2^*)$ — операторный модуль сдвига, a_{20} — мгновенный модуль сдвига, а R_2^* — интегральный оператор с ядром $R_2(t, \tau)$. При воздействии на некоторую функцию времени он имеет вид

$$a_{2t}\zeta(t) = a_{20}[\zeta(t) - \int_0^t R_2(t, \tau)\zeta(\tau)\,d\tau].$$

При этом функция ω определяется в соответствии с ([1]). В случае линейного упрочнения

$$\sigma_i = 3a_{2t}\varepsilon_i \quad \text{при } \sigma_i < \sigma_s, \tag{2}$$

$$\sigma_i = a_{3t}\varepsilon_i + \varphi(t) \ \text{ при } \sigma_i \geqslant \sigma_s. \tag{3}$$

Здесь $\varphi(t) = [(3a_{2t} - a_{3t}) / 3a_{2t}]\sigma_s$; a_{3t} — операторный модуль упрочнения, конструирующийся аналогично оператору a_{2t} с ядром $R_3(t, \tau)$; σ_s — предел текучести материала. Учитывая, что для сферы ([1]) $\sigma_i = (\sigma_\theta - \sigma_r)\chi$; $\varepsilon_i = {}^2/_3(\varepsilon_\theta - \varepsilon_r)\chi$, из (3) получим

$$(\sigma_\theta - \sigma_r)\chi = {}^2/_3 a_{3t}(\varepsilon_\theta - \varepsilon_r)\chi + \varphi(t). \tag{4}$$

Здесь σ_r и σ_θ; ε_r и ε_θ — радиальные и тангенциальные компоненты напряжений и деформаций соответственно; u — радиальное перемещение точки на сфере; $\chi = \operatorname{sign} u$.

К соотношению (4) присовокупляется линейное дилотационное уравнение в операторной форме

$$\sigma = a_{1t}\theta, \tag{5}$$

где оператор $a_{1t} = a_{10}(1 - R_1^*)$; $3\sigma = 2\sigma_\theta + \sigma_r$; $\theta = 2\varepsilon_\theta + \varepsilon_r$.

Из системы уравнений (4) и (5) следует

$$\begin{aligned} \sigma_r &= a_{1t}(2u/r + du/dr) - {}^4/_9 a_{3t}(u/r - du/dr) - {}^2/_3\chi\,\varphi(t), \\ \sigma_\theta &= a_{1t}(2u/r + du/dr) + {}^2/_9 a_{3t}(u/r - du/dr) + {}^1/_3\chi\,\varphi(t). \end{aligned} \tag{6}$$

Подставляя σ_r и σ_θ из (6) в уравнение равновесия (1), получим интегро-дифференциальное уравнение в перемещениях

$$(a_{1t}+\mu_t)\,D\{u\}=\frac{2\varphi(t)}{r}\,\chi\quad(\mu_t={}^4/_9\,a_{3t}),\tag{7}$$

где дифференциальный оператор

$$D\{u\}=\frac{d^2u}{dr^2}+2\,\frac{1}{r}\,\frac{du}{dr}-2\,\frac{u}{r^2}\,.$$

Общее решение уравнения (7) находится в два этапа. Будем иметь

$$u=A(t)r+B(t)\,/\,r^2+{}^1/_3K(t)\ln r.\tag{8}$$

Здесь известная функция $K(t)=(a_{1t}+\mu_t)^{-1}2\varphi(t)\chi$. Функции $A(t)$ и $B(t)$ подлежат определению. Подставляя в формулы (6) вместо перемещения $u(r,t)$ найденное для него выражение, получим

$$\sigma_r=3a_{1t}A(t)-3\mu_tB(t)\,/\,r^3+a_{1t}K(t)\ln r+{}^1/_3(a_{1t}+\mu_t)K(t)-{}^2/_3\chi\varphi(t),\tag{9}$$

$$\sigma_\theta=3a_{1t}A(t)+{}^3/_2\mu_tB(t)\,/\,r^3+a_{1t}K(t)\ln r+{}^1/_3(a_{1t}-\mu_t\,/\,2)K(t)+\\+{}^1/_3\chi\varphi(t).$$

Выражения для составляющих напряжения σ_r^y и σ_θ^y в упругой зоне определяются согласно принятой выше схеме при исходной физической зависимости вида (2). Будем иметь

$$\sigma_r^y=3a_{1t}C_1-4a_{2t}C_2/r^3;\qquad\sigma_\theta^y=3a_{1t}C_1+2a_{2t}C_2/r^3.\tag{10}$$

Здесь $C_1(t)$ и $C_2(t)$ — функции времени, подлежащие определению. Из условия $\sigma_i|_{r=R(t)}=\sigma_s$ с учетом выражений (10) следует

$$6C_2(t)=R^3\chi\,\sigma_s\,a_{2t}^{-1}.\tag{11}$$

Для определения неизвестной функции $C_1(t)$ воспользуемся граничным условием $\sigma_r^y|_{r=b}=-q$. Получим

$$C_1(t)={}^2/_9\,\chi m^3a_{2t}a_{1t}^{-1}\quad\frac{R^3}{a^3}\,\sigma_sa_{2t}^{-1}-{}^2/_9\,a_{1t}^{-1}\,q,$$

где $m=b\,/\,a$. Принимая во внимание условие равенства соответствующих напряжений на границе упругой и пластической областей, получим систему уравнений, решая которую найдем

$$9B(t)=\mu_t^{-1}R^3(t)\,[\chi\sigma_s+{}^1/_2\,\mu_tK(t)-\chi\varphi(t)],\tag{12}$$

$$9a_{1t}A(t)=9a_{1t}C_1(t)-3a_{1t}K(t)\ln R(t)-a_{1t}K(t).$$

Используя условие на внутреннем контуре $\sigma_r^n|_{r=a}=-p$ и учитывая соотношения (11) и (12), получим нелинейное интегральное уравнение для нахождения искомой функции $R(t)$. Будем иметь

$$\alpha_tz-\beta_t\ln z=F(t),\tag{13}$$

где

$$\alpha_tz={}^2/_3\chi\,\frac{\sigma_s}{m^3}\,a_{2t}za_{2t}^{-1}-{}^2/_3\chi\sigma_sz-{}^1/_3\,z\mu_tK(t)+{}^2/_3\,\chi z\varphi(t);$$

$$\beta_t={}^1/_3a_{1t}K(t);\quad F(t)=-p+q-{}^1/_3\mu_tK(t)+{}^2/_3\chi\varphi(t);\quad z=R^3\,/\,a^3.$$

Для дальнейшего целесообразно привести уравнение (13) к виду

$$z=z_0\exp\left(-\varkappa_tz\right),\tag{14}$$

где

$$\varkappa_t=-\alpha_t\beta_t^{-1};\quad z_0=\exp\left[-\beta_t^{-1}F(t)\right].$$

Уравнение (14) будем решать методом последовательных приближений. В качестве нулевого приближения примем z_0. Тогда последовательные приближения определяются следующим образом

$$z_n = z_0 \exp\left(-\varkappa_t z_{n-1}\right).$$

Установим двухстороннюю оценку решения $z(t) = \lim\limits_n z_n(t)$ уравнения (14).

Рассмотрим вначале первое приближение

$$z_1 = z_0 \exp\left(-\varkappa_t z_0\right). \tag{15}$$

Учитывая, что оператор $\varkappa_t = (m^3 - m^3\chi_t - 1)\chi_t^{-1}$, где $3\chi_t = (3a_{2t} - a_{3t}) \cdot$ $\cdot a_{1t}a_{2t}^{-1}(\sigma_{1t} + \mu_t)^{-1}$ и принимая $m^3(1-\chi_t) > 1$, найдем, что $\varkappa_t \cdot 1 > 0$. Применяя далее в (15) теорему о среднем, получим

$$z_1(t) = z_0(t) \exp\left[-z_0(\theta t)N\right] \qquad (N = \varkappa_t \cdot 1;\ 0 < \theta < 1). \tag{16}$$

Пусть $\chi_\infty > \chi_0$. Последнее имеет место по крайней мере в случае отсутствия дилотационного последействия и когда кусочно-линейная аппроксимация реализуется применительно к нелинейной физической зависимости Работнова [2]. Тогда учитывая, что $z_0 = \exp\left[(p - q - \chi_t)\chi_t^{-1}\right]$, находим $z_0(\infty) < z_0(t) < z_0(0)$. Из (16) следует, что

$$z_1(t) < z_0(t) \exp\left[-z_0(t)N\right].$$

Так как $z_0(t) > 1$, то $\ln z_0(t) < z_0(t)$. Поэтому $1 < z_1 < z_0^{1-N}$. Аналогично для второго приближения: $1 < z_2 < z_0^{1-N+N^2}$. Для n-го приближения будем иметь оценку

$$1 < z_n < z_0^{(1+(-1)^n N^{n+1})/(1+N)}. \tag{17}$$

Из выражения для $\varkappa_t$ следует, что неравенства $0 < N < 1$ имеют место при условии

$$m^3(1-\chi_t) < m^3 < (1+\chi_t)(1-\chi_t)^{-1}. \tag{18}$$

В этом случае из (17) следует

$$1 < \lim_{n\to\infty} z_n < z_0^{1/(1+N)}. \tag{19}$$

Если условия (18) не выполняются, решение задачи реализуется при введении величины $k = \alpha N$, где $0 < \alpha < N^{-1}$. Тогда $0 < k < 1$, и неравенство (19) сохраняет смысл и при $N > 1$.

К уравнению вида (13) приводится также задача об определении зоны пластичности в бесконечном цилиндре. Так, в случае цилиндра, подкрепленного упругой оболочкой, имеем

$$\alpha_t z = 4\left(\delta_t z f(t) - a_{1t}\xi_t z\right); \quad \beta_t = -\frac{2(\lambda_t + \delta_t)}{\lambda + 2\delta_t}\psi(t),$$

$$F(t) = 2\left(p + a_{1t}\frac{\sigma_s}{3a_{2t}\gamma}\frac{\delta_t - \sqrt{3}\gamma a_{2t}}{\delta_t + a_{1t}}\right),$$

где

$$\delta_t = \frac{\gamma}{\sqrt{3}}a_{2t}; \quad f(t) = \frac{\sigma_s}{a_{1t} + \delta_t}\frac{\sqrt{3}a_{1t} + 3\gamma a_{2t}}{6\sqrt{3}\gamma a_{2t}},$$

$$\xi_t z = \frac{6\alpha\gamma a_{2t} - \sqrt{3}b}{\sqrt{3}(b + 2\alpha a_{1t})m^2} z \frac{\sigma_s}{6\gamma a_{2t}}; \quad \alpha = \frac{\rho^2(1 - \nu^{(0)2})}{E^{(0)}h},$$

ρ, h — радиус и толщина оболочки, $E^{(0)}$, $\nu^{(0)}$ — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки, $\lambda_t = a_{1t} - \delta_t$; $\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}\varphi(t)$, γ — аппроксимирующий коэффициент по А. А. Ильюшину [3], фигурирующий в приближенном представлении $\varepsilon_i = \gamma(\varepsilon_\theta - \varepsilon_r)$.

В случае цилиндра, не помещенного в оболочку, соответствующая двухсторонняя оценка решения уравнения вида (13) будет иметь место безотносительно к выполнимости условий типа (18), тогда как для подкрепленного цилиндра такая оценка может быть установлена лишь при некоторых ограничениях, касающихся толщины цилиндра, упругих характеристик материала оболочки и реологических постоянных, обеспечивающих сходимость последовательных приближений к искомому решению.

Днепропетровский горный институт
Днепропетровский государственный университет

Поступило
8 VI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Ильюшин, Пластичность, М.— Л., 1948. [2] Ю. Н. Работнов, Вестн. Московск. унив., № 10 (1948). [3] А. А. Ильюшин, ПММ, 10, в. 3 (1946).