Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 1

УДК 51.330.115 *МАТЕМАТИКА*

И. А. КРАСС

АСИМПТОТИКА РАСТУЩИХ ТРАЕКТОРИЙ В МОДЕЛЯХ ГЕЙЛА — НЕЙМАНА

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 1 VI 1970)

В данной заметке, используя понятие темпа роста продукта на траектории [3], показывается различие в асимптотике роста продуктов на бесконечных траекториях в моделях Неймана и Гейла. Кроме того, находится связь между величиной темпа роста продуктов на траектории и структурой модели.

Пусть R_+^n — неотрицательный ортант n-мерного эвклидова пространства. Модель Гейла $\mathfrak{M}$ задается выпуклым замкнутым конусом $Z \subset R_+^n \times R_+^n$ (конусом технологий), который удовлетворяет условиям: 1) $(0, y) \notin Z$ при $y \neq 0$, 2) существует пара $(x, y) \in Z$ такая, что $y > 0$. Модель Гейла, у которой конус технологий многогранный, называется моделью Неймана. (Более подробно см. ([1], [2]).) Последовательность $\{x(t)\}_{t=0}^{t=T}$ называется $(x(0), T)$-траекторией в модели $\mathfrak{M}$, если $(x(t), x(t+1)) \in Z$ $(t = 0, 1, \ldots, T-1)$. Аналогично вводятся и $(x(0), \infty)$-траектории $\{x(t)\}$.

Как и в ([3]), будем говорить, что i-я компонента (i-й продукт) растет на $(x(0), \infty)$-траектории $\{x(t)\}$ с темпом роста α, если

$$0 < \varlimsup_{t\to\infty} [x_i(t)/\alpha^t] < +\infty,$$

и, соответственно, i-й продукт растет с темпом роста больше α, если

$$\varlimsup_{t\to\infty} [x_i(t)/\alpha^t] = +\infty.$$

Следуя ([2]), будем говорить, что в модели $\mathfrak{M}$ имеется подмодель $\mathfrak{M}_1$, если существует выпуклый замкнутый конус $Z_1 \subset Z$, удовлетворяющий условиям 1), 2), и подмножество индексов $J(\mathfrak{M}_1) \subset N = \{1, \ldots, n\}$ такое, что из $(x, y) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n) \in Z$ следует $x_j = y_j = 0$ для $j \notin J(\mathfrak{M}_1)$. Условие 2), налагаемое на конус технологий, понимается в ослабленной форме, а именно: в конусе Z_1 существует пара (x, y) такая, что $y_j > 0$ для $j \in J(\mathfrak{M}_1)$.

Пусть $\alpha(\mathfrak{M}) = \max\limits_{(x,y)\in Z\cap S} \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} y_i/x_i$ — технологический темп роста модели $\mathfrak{M}$. Здесь S — единичный шар в R^{2n}, а минумум берется по компонентам, для которых $x_i \neq 0$.

Теорема 1. *Для любой $(x(0), \infty)$-траектории $\{x(t)\}$ в модели Неймана $\mathfrak{M}$ имеет место соотношение*

$$\varlimsup_{t\to\infty} \{x_i(t)/t^k [\alpha(\mathfrak{M})]^t\} < +\infty, \tag{1}$$

где k — число подмоделей в модели $\mathfrak{M}$, имеющих технологический темп роста $\alpha\mathfrak{M}$.

Теорема 1 говорит о том, что в модели Неймана могут существовать траектории, на которых продукты растут с темпом роста большим, чем

$\alpha(\mathfrak{M})$, но продуктов, растущих с темпом роста $\beta > \alpha(\mathfrak{M})$, не существует. Асимптотическая оценка (1) аналогична оценке (см. ([5])) для растущих траекторий в системе линейных дифференциальных уравнений (k соответствует кратности корня $\alpha(\mathfrak{M})$).

Данная оценка является точной, т. е. существуют модели Неймана, для которых она достигается.

Модель Гейла $\mathfrak{M}$, конус технологий которой имеет вид

$$Z = \left\{(x, y)/(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)\, u_i;\ u_i \geqslant 0;\ (a_i, b_i) \in R^{2n}\right\},$$

называется квазинеймановской (такие модели рассматривались в ([4])).

Лемма 1. *Конус (2) замкнут, если множество $Z = \{(a_i, b_i);\ i = 1, 2, \ldots\}$ замкнуто.*

На основе леммы 1 доказывается

Теорема 2. *Пусть последовательность положительных чисел $\{\gamma(t)\}$ такова, что $\lim\limits_{t\to\infty} [\gamma(t) / \gamma(t+1)] = 1$. Тогда существует квазинеймановская модель $\mathfrak{M}$ и $(x(0), \infty)$-траектория в ней такая, что*

$$x_1(t) = \gamma(t)\, [\alpha(\mathfrak{M})]^t.$$

Теорема 2 показывает, что асимптотика роста продуктов на бесконечных траекториях существенно различается у моделей Неймана и Гейла, т. е. аппроксимация многогранным конусом выпуклого конуса не приемлема для изучения данных асимптотических оценок.

Темп роста продукта на траектории тесно связан с наличием у модели $\mathfrak{M}$ подмодели.

Теорема 3. *Пусть в модели $\mathfrak{M}$ существует $(x(0), \infty)$-траектория, на которой по крайней мере два продукта имеют разные темпы роста. Тогда в модели $\mathfrak{M}$ существует подмодель $\mathfrak{M}_1$.*

Теорема 4. *Если в модели Гейла $\mathfrak{M}$ существует $(x(0), \infty)$-траектория, на которой продукты из множества $K \subset N$ имеют темп роста больший $\beta > 0$, то в модели существует подмодель $\mathfrak{M}_1$, такая, что $J(\mathfrak{M}_1) \subset K$.*

Тройка $(\alpha, (\bar{x}, \bar{y}), p)$, где $\alpha > 0$, $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z$, p — неотрицательный функционал ($p \neq 0$), определяет обобщенное состояние равновесия в модели $\mathfrak{M}$, если

$$\alpha\bar{x} \leqslant \bar{y}; \quad \alpha px \geqslant py \quad \text{для всех} \quad (x, y) \in Z. \tag{2}$$

Здесь px — значение функционала p на векторе $x \in R^n$.

В отличие от определения обычного состояния равновесия (см. ([2])), которое не всегда существует в модели Гейла, в данном определении отсутствует требование $p\bar{y} > 0$.

Лемма 2. *Обобщенное состояние равновесия существует в любой модели Гейла.*

Число α в неравенствах (2) называется темпом роста данного состояния равновесия.

Теорема 5. *Если в модели $\mathfrak{M}$ существует $(x(0), \infty)$-траектория, на которой некоторый продукт растет с темпом роста равным или большим $\beta > 0$, то в модели $\mathfrak{M}$ существует подмодель, у которой найдется обобщенное состояние равновесия с темпом роста не меньше β.*

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
18 V 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. von Neumann, Rev. Econ. Studies, 13, 1 (1945). [2] Д. Гейл, Сборн. Линейные неравенства, М., 1959, стр. 382. [3] В. Л. Макаров, Сибирск. матем. журн., 7, № 4, 832 (1966). [4] С. М. Мовшович, Экономика и матем. методы, 5, № 6, 877 (1969). [5] Э. Л. Коддингтон, Н. Левинсон, Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, М., 1958.