Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 1

УДК 513.88:513.83+519.48 *МАТЕМАТИКА*

В. В. КУЗНЕЦОВ, А. С. ШВАРЦ

ФУНКТОРЫ В КАТЕГОРИИ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 3 VI 1970)

Эта статья посвящена исследованию функторов в категории векторных пространств. Указывается класс функторов, который, с одной стороны, достаточно богат (теорема 1), а, с другой стороны, может быть подробно изучен (теоремы 2 и 3).

Категория $\mathscr{V}$, объектами которой являются векторные пространства над полем вещественных чисел, а морфизмами — линейные отображения, естественным образом превращается в D-категорию ([1, 2]), если в качестве функторов $H(X, Y)$ и $X \otimes Y = \Sigma_X(Y)$, фигурирующих в определении D-категории, взять соответственно функтор $\mathrm{Hom}(X, Y)$ и обычное тензорное произведение $X \otimes Y$ ([3]). В дальнейшем будем векторные пространства называть в.п., а говоря «отображения» или «функционал», будем всегда иметь в виду соответственно линейные отображения или линейный функционал. Будем обозначать через R одномерное в.п., а через X^* — в.п. $H(X, R)$ (пространство функционалов на X). Пусть A — линейно топологическое в.п. (т. е. топологическое в.п. над дискретным полем вещественных чисел, в котором фундаментальную систему окрестностей нуля образует семейство подпространств ([4, 5])), такие пространства будем называть л.т.в.п. Определим функтор Ω_A в категории $\mathscr{V}$, поставив в соответствие пространству $X \in \mathscr{V}$ пространство $\Omega_A(X) \in \mathscr{V}$, состоящее из всех линейных непрерывных отображений пространства A в X (мы рассматриваем X как дискретное л.т.в.п.; на морфизмах функтор Ω_A определяется естественным образом). Пространство $\Omega_A(R)$ будем обозначать символом A'.

Теорема 1. *Для каждого допустимого функтора F, действующего в категории $\mathscr{V}$, функтор DF имеет вид Ω_A.*

Доказательство. Условимся здесь и впредь, имея функторное отображение $\alpha: F \to G$, через α_X обозначать отображение $F(X) \to G(X)$ (X — произвольный объект), порождаемое отображением α. Отметим следующее простое утверждение.

Лемма 1. *Если отображения $\alpha: F \to \Sigma_B$ и $\beta: F \to \Sigma_B$ различны, то и отображения $\alpha_R: F(R) \to B$ и $\beta_R: F(R) \to B$ также различны.*

Из леммы следует, что при любом $B \in \mathscr{V}$ пространство $DF(B)$ вложено в пространство $H(F(R), B)$. Опишем образ при этом вложении. Рассмотрим класс всех отображений $\alpha: F \to \Sigma_B$ по всем $B \in \mathscr{V}$. Множество ядер соответствующих отображений $\alpha_R: F(R) \to B$ обозначим через $\mathfrak{M}$. Покажем, что семейство $\mathfrak{M}$ подпространств пространства $F(R)$ обладает следующим свойством: если $L_1 \in \mathfrak{M}$ и $L_2 \in \mathfrak{M}$, то $L_1 \cap L_2 \in \mathfrak{M}$. Пусть для отображений $\alpha: F \to \Sigma_{B_1}$ и $\beta: F \to \Sigma_{B_2}$ подпространства L_1 и L_2 из $F(R)$ служат, соответственно, ядрами отображений $\alpha_R: F(R) \to B_1$ и $\beta_R: F(R) \to B_2$. Рассмотрим функтор $S = \Sigma_{B_1} \oplus \Sigma_{B_2} = \Sigma_{B_1 \oplus B_2}$. Обозначим соответственно через α_1 и β_1 отображения функтора F в функтор S, индуцированные отображениями α и β. Рассмотрим отображение $\gamma = \alpha_1 + \beta_1$. Очевидно, что $\mathrm{Ker}\,\gamma = L_1 \cap L_2$. Следовательно, $L_1 \cap L_2 \in \mathfrak{M}$.

Убедимся теперь, что каково бы ни было отображение $\omega: F(R) \to B$, ядро которого содержит некоторое $L \in \mathfrak{M}$, найдется функторное отображение $\alpha: F \to \Sigma_B$, для которого $\alpha_R = \omega$. Возьмем отображение $\beta: F \to \Sigma_{B_1}$, при котором $L = \operatorname{Ker} \beta_R$. Обозначим через B_2 подпространство из B_1, служащее образом при отображении β_R, а через P — какое-нибудь отображение, проектирующее B_1 на B_2. Тогда для отображения $\beta' : F \to \Sigma_{B_2}$, определяемого формулой $\beta' = DF(P)\beta$, будем иметь $L = \operatorname{Ker} \beta_R'$ и β_R' — эпиморфизм. Взяв теперь отображение $f: B_2 \to B$ так, чтобы $\omega = f\beta_R'$, мы получим искомое отображение $\alpha: F \to \Sigma_B$ по формуле $\alpha = DF(f)\beta'$.

Итак, для того, чтобы элемент $\varphi \in H(F(R), B)$ принадлежал образу $DF(B)$ при указанном выше вложении $DF(B) \to H(F(R), B)$, необходимо и достаточно, чтобы ядро отображения φ_R принадлежало $\mathfrak{M}$. Пусть L_0 — пересечение всех $L \subset \mathfrak{M}$, $A = F(R) / L_0$ и $\mathfrak{N}$ — семейство подпространств N из A вида L / L_0, где $L \subset \mathfrak{M}$. Введем в A линейную топологию, в которой фундаментальной системой окрестностей нуля служит семейство $\mathfrak{N}$. Из сказанного выше следует, что при каждом $B \in \mathscr{V}$ пространство $DF(B)$ изоморфно пространству непрерывных отображений л.т.в.п. A в дискретное в.п. B, т. е. $\Omega_A(B)$. Эти изоморфизмы и обеспечивают изоморфизм функторов DF и Ω_A. Теорема доказана.

Пусть L — некоторое л.т.в.п. и P — его подпространство. Тогда через $P^\perp$ мы будем обозначать подпространство из L' (или из иного пространства функционалов на L), ортогональное к P, т. е. подпространство, образованное всеми функционалами φ, для которых $\varphi(P) = 0$. Будем называть, следуя [5], топологию в L', в которой фундаментальную систему окрестностей нуля образуют подпространства $N^\perp$, ортогональные к конечномерным подпространствам N из L, слабой. Л.т.в.п., получаемое при наделении L' (или L^*) слабой топологией, будем обозначать через L_w' (или L_w^*). Если теперь B — дискретное в.п., то $D\Omega_B = \Sigma_B$ [1, 2], а поэтому $\Sigma_B = \Omega_A$ для некоторого л.т.в.п. A. Описание этого A дает

Лемма 2. *При любом $B \in \mathscr{V}$ имеет место изоморфизм $\Sigma_B = \Omega_{B^*_w}$.*

Покажем, как при произвольном $X \in \mathscr{V}$ устанавливается соответствие между пространствами $B \otimes X$ и $\Omega_{B^*_w}(X)$. Пусть $z = \sum_{i=1}^{n} b_i \otimes x_i$ — элемент пространства $B \otimes X$, причем элементы $b_1, b_2, \ldots, b_n$ в пространстве B и элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в пространстве X линейно независимы. Построим отображение $\varphi: B^* \to X$ по следующему правилу: если для функционала $\mu: B \to R$ имеем $\mu(b_i) = \lambda_i$, то $\varphi(\mu) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$. Ядром отображения φ является слабая окрестность нуля в B^*, определяемая элементами $b_1, \ldots, b_n$, следовательно, φ слабо непрерывно. Соответствие $z \to \varphi$ и определяет искомый изоморфизм.

Теорема 2. *Если A и B — полные л.т.в.п., то отображения $\Omega_A \to \Omega_B$ находятся во взаимно однозначном соответствии с непрерывными отображениями $B \to A$.*

Доказательство. Каждому отображению $\alpha: \Omega_A \to \Omega_B$ соответствует отображение $\alpha_R: A' \to B'$. Нетрудно доказать, что для двух различных отображений $\alpha: \Omega_A \to \Omega_B$ и $\beta: \Omega_A \to \Omega_B$ отображения α_R и β_R также различны. Назовем отображение $f: A' \to B'$ продолжимым, если существует отображение $\alpha: \Omega_A \to \Omega_B$, для которого $\alpha_R = f$. Ясно, что множество отображений функтора Ω_A в функтор Ω_B находится во взаимно однозначном соответствии с множеством продолжимых отображений $A' \to B'$. Если $g: B \to A$ — непрерывное отображение, то сопряженное отображение $g^*: A' \to B'$ является продолжимым. Соответствующее отображение $\alpha: \Omega_A \to \Omega_B$ определяется по формуле $\alpha_X(\varphi) = \varphi g$, здесь X — произвольный объект из V, φ — произвольный элемент из $\Omega_A(X)$. Таким образом, для доказательства теоремы нам достаточно установить, что каждое продолжимое отображение $f: A' \to B'$ является сопряженным к некоторому непрерывному отображению $g: B \to A$.

Лемма 3. *Если $f: A' \to B'$ продолжимо, то для каждой линейной окрестности нуля U из A найдется такая линейная окрестность нуля V из B, что $f(U^\perp) \subset V^\perp$.*

Доказательство. Пусть $\alpha: \Omega_A \to \Omega_B$ — отображение, для которого $\alpha_R = f$. Выберем произвольную линейную окрестность нуля U из A, и рассмотрим пространство $A_U = A / U$ как объект категории $\mathscr{V}$. Обозначим через θ естественное отображение $A \to A_U$, и пусть $\rho = \alpha_{A_U}(\theta)$. Ядро отображения $\rho: B \to A_U$, являющееся линейной окрестностью нуля в B, обозначим через V. Нетрудно видеть, что если φ пробегает всю совокупность отображений $A_U \to R$, то совокупность образов элемента θ при отображениях $\Omega_A(\varphi): \Omega_A(A_U) \to A'$ представляет собой множество всех элементов подпространства $U^\perp$ из A', а совокупность образов элемента ρ при отображениях $\Omega_B(\varphi) : \Omega_B(A_U) \to B'$ — множество всех элементов подпространства $V^\perp$ из B'. Но так как для каждого $\varphi: A_U \to R$ образом элемента $\Omega_A(\varphi)\theta \in A'$ при отображении f является элемент $\Omega_B(\varphi)\rho \in B'$, то $f(U^\perp) = V^\perp$, что и доказывает лемму.

Лемма 4. *Всякое продолжимое отображение $f: A' \to B'$ слабо непрерывно на подпространствах вида $U^\perp$, где U — линейные окрестности нуля из A.*

Доказательство. Будем пользоваться обозначениями, принятыми при доказательстве леммы 3. Пусть N — произвольная слабая линейная окрестность нуля из B', а $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — элементы из B, ее порождающие. Тогда слабую окрестность нуля $M = N \cap V^\perp$ на подпространстве $V^\perp$ образуют элементы вида $\Omega_B(\varphi)\rho$ для всех таких $\varphi: A_U \to R$, которые обращаются в нуль в точках $\rho(b_1), \rho(b_2), \ldots, \rho(b_n) \in A_U$. В то же время элементы $\Omega_A(\varphi)\theta$ при тех же φ образуют некоторую слабую окрестность нуля L на подпространстве $U^\perp$ из A'. Утверждение леммы следует из того, что $f^{-1}(M) = L$.

Пусть L — некоторое л.т.в.п. и U пробегает семейство всех линейных окрестностей нуля в L. Тогда, как показано в ([5]), пополнение L изоморфно пространству $\tilde{L}$, образованному функционалами на L', слабо непрерывными на подпространствах вида $U^\perp$, в котором фундаментальную систему окрестностей нуля образуют подпространства $U^{\perp\perp} = (U^\perp)^\perp$. Отсюда следует, что если L полно, то $\tilde{L} = L$ и $U^{\perp\perp} = U$. Если теперь $f: A' \to B'$ — продолжимое отображение, то, как видно из лемм 3 и 4, оно порождает некоторое отображение $g: \tilde{B} \to \tilde{A}$. А поскольку A и B предполагаются полными, то g можно рассматривать как отображение в.п. B в в.п. A.

Лемма 5. *Отображение $g: B \to A$, порождаемое продолжимым отображением $f: A' \to B'$, непрерывно.*

Доказательство. Пусть U — произвольная линейная окрестность нуля из A, а V — такая линейная окрестность нуля из V, для которой $f(U^\perp) \subset V^\perp$. Тогда, если функционал $\gamma: B' \to R$ такой, что $\gamma(V^\perp) = 0$, то для функционала $\delta = \gamma f$ имеем $\delta(U^\perp) = 0$. А так как $g(\gamma) = \delta$, то отсюда следует, что $g(V^{\perp\perp}) \subset U^{\perp\perp}$, или $g(V) \subset U$. Лемма доказана.

Заметим теперь, что продолжимое отображение $f: A' \to B'$ сопряжено с отображением $g: B \to A$, которое оно порождает. Это и завершает доказательство теоремы.

Результаты теоремы 2 и леммы 2 позволяют найти двойственный функтор к функтору Ω_A. Здесь следует заметить, что всякий функтор вида Ω_A можно считать порожденным полным л.т.в.п., так как $\Omega_A = \Omega_{\tilde{A}}$ (через $\tilde{A}$ мы обозначаем пополнение пространства A). Напомним теперь еще об одной топологии в пространствах вида L', которая наряду со слабой вводится в линейно топологических пространствах через посредство понятия двойственности ([5]). Пусть L — некоторое л.т.в.п., и пусть C пробегает множество всех линейно компактных подпространств ([4, 5]) из L. В качестве фундаментальной системы окрестностей нуля в интересующей нас топологии в L' берется семейство подпространств вида $C^\perp$. Будем обозначать эту топологию через $\varkappa$, а л.т.в.п., полученное при наделении L' топологией

$\varkappa$,— через $L_{\varkappa}'$. Заметим еще, что поскольку л.т.в.п. L можно алгебраически отождествить с в.п. $(L_w')'$, то в L можно также рассматривать как слабую топологию, так и топологию $\varkappa$. Соответствующие этим топологиям л.т.в.п. будем обозначать через L_w и $L_{\varkappa}$.

Теорема 3. *Если A — полное л.т.в.п., то* $D\Omega_A = \Omega_{A_{\varkappa}'}$.

Доказательство*. Из леммы 2 и теоремы 2 сразу следует, что при любом $B \in \mathscr{V}^0$ множество функторных отображений $\Omega_A \to \Sigma_B$ изоморфно множеству $\{B_w^* \to A\}$, т. е. множеству всех непрерывных отображений $B_w^* \to A$. Так как B_w^* линейно компактно, то $\{B_w^* \to A\} = \{B_w^* \to A_w\}$. Это вытекает из того, что образ линейного компакта при непрерывном отображении линейно компактен и что линейно компактное подпространство в слабой топологии A является линейно компактным и в исходной топологии, причем обе топологии на этом подпространстве совпадают. Поскольку для любых л.т.в.п. L и K выполняются изоморфизмы $\{L_w \to K_w\} = \{K_w' \to L_w'\}$ и $\{L_w \to K_w\} = \{L_{\varkappa} \to K_{\varkappa}\}$, имеем $\{B_w^* \to A_w\} = \{A_w' \to B_w\} = \{A_{\varkappa}' \to B_{\varkappa}\}$.

Так как в дискретном в.п. B топология $\varkappa$ дискретна, то $\{A_{\varkappa}' \to B_{\varkappa}\} = \{A_{\varkappa}' \to B\}$. Итак, установлен изоморфизм $\{\Omega_A \to \Sigma_B\} = \{A_{\varkappa}' \to B\}$, который доказывает теорему.

При замене в представлении функтора $D\Omega_A$ пространства $A_{\varkappa}'$ на его пополнение $\bar{A}_{\varkappa}'$ удобно иметь описание этого пополнения.

Если в пространстве A ввести сильнейшую из линейных топологий, совпадающих с исходной на линейно компактных подпространствах, и полученное при этом л.т.в.п. обозначить через $[A]$, то пополнение пространства $A_{\varkappa}'$ оказывается изоморфным пространству $[A]_{\varkappa}'$. Теорему 3 можно переформулировать так:

Теорема 3'. *Если A — полное л.т.в.п., то* $D\Omega_A = \Omega_{[A]_{\varkappa}'}$.

Поступило
15 V 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. С. Шварц, ДАН, 148, 2, 288 (1963). [2] Р. С. Показеева, А. С. Шварц, Математический сборн., 71, 3, 357 (1966). [3] А. Картан, С. Эйленберг, Гомологическая алгебра, ИЛ, 1960. [4] С. Лефшец, Алгебраическая топология, ИЛ, 1949. [5] G. Köthe, Topologische lineare Räume, 1, Berlin, 1960.

* Все положения из теории линейно топологических пространств, которые здесь используются, выведены в ([5]).