Доклады Академии наук СССР
1970. Том 195, № 4

УДК 513.836 **МАТЕМАТИКА**

А. Т. ФОМЕНКО

РЕАЛИЗАЦИЯ ЦИКЛОВ В КОМПАКТНЫХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ ВПОЛНЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИМИ ПОДМНОГООБРАЗИЯМИ

(Представлено академиком П. С. Александровым 8 V 1970)

1. Классическая задача реализации циклов подмногообразиями получила к настоящему моменту более или менее полное освещение в большом количестве работ чисто топологического характера. Естественной особенностью всех этих исследований явилось то обстоятельство, что под реализацией цикла понималась его реализация гладким подмногообразием объемлющего многообразия; при этом какие-либо другие свойства этих подмногообразий, например метрические, если объемлющее многообразие — риманово, игнорировались, как топологически неинвариантные.

В настоящей заметке задача реализации рассматривается с позиций, учитывающих метрическую сторону вопроса реализации; т. е. способ вложения подмногообразия в объемлющее риманово многообразие $\mathfrak{M}^n$. Из множества всех гладких подмногообразий мы выделим вполне геодезические подмногообразия, как наиболее «однородные» модели реализуемых циклов. При таком подходе задача реализации разбивается на две части: 1) дано компактное вполне геодезическое подмногообразие V в $\mathfrak{M}^n$; какой цикл оно реализует в $\mathfrak{M}^n$? 2) дан нетривиальный цикл в $\mathfrak{M}^n$; можно ли его реализовать вполне геодезическим подмногообразием данного типа?

В настоящей заметке обе эти задачи решаются для того случая, когда объемлющее многообразие является симметрическим пространством.

2. Пусть сначала $\mathfrak{M}^n = \mathfrak{G}$ есть компактная связная группа Ли и пусть $V \subset \mathfrak{G}$ — вполне геодезическое подмногообразие. Когда оно реализует нетривиальный цикл в $H_*(\mathfrak{G}; \mathrm{R})$? Начнем с того частного случая, когда V является подгруппой в $\mathfrak{G}$. Тогда легко видеть, что V реализует нетривиальный цикл тогда и только тогда, когда V вполне негомологична нулю в $\mathfrak{G}$ по вещественным коэффициентам R, что полностью сводит нашу задачу к рассмотрению хорошо известного гомоморфизма $\rho_{\mathrm{R}}^*(V; \mathfrak{G})$: $H^*(B_{\mathfrak{G}}; \mathrm{R}) \to H^*(B_V; \mathrm{R})$ и выделению всех тех случаев, когда $\rho_{\mathrm{R}}^*(V; \mathfrak{G})$ является эпиморфизмом. Известно, что эта задача полностью решается в терминах алгебр Ли; а именно, $\rho_{\mathrm{R}}^*(V; \mathfrak{G})$ совпадает с гомоморфизмом i^*: $I_G \to I_H$, где I_G, I_H суть кольца полиномов на картановских подалгебрах алгебр G и H, инвариантных относительно группы Вейля.

3. Пусть теперь V — произвольное компактное односвязное вполне геодезическое подмногообразие в $\mathfrak{G}$. Если $\mathfrak{G} = \tilde{I}_0(V)$ — универсальная накрывающая группа над компонентой единицы группы изометрий $I_0(V)$ пространства V, то хорошо известно (см. ([1])), что $\mathfrak{G}$ распадается в прямое произведение $\tilde{I}_0(V) = \tilde{I}_0(V_1) \times \ldots \times \tilde{I}_0(V_s)$, где $V = V_1 \times \ldots \times V_s$ — разложение V на неприводимые сомножители. Оказывается, что если $\mathfrak{G}$ — произвольная компактная группа, то изучение вложения $V \to \mathfrak{G}$ сводится к случаю вложения $V \to \tilde{I}_0(V)$; а именно, имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть V — связное, компактное, односвязное вполне геодезическое подмногообразие в компактной группе Ли $\mathfrak{G}$ и пусть*

$\{\mathfrak{G}_\alpha\}$ — *совокупность всех подгрупп группы* $\mathfrak{G}$, *содержащих подмногообразие* V. *Тогда* V *распадается в прямое произведение* $V = K \times V_1 \times \ldots \times V_r = K \times V'$, *где* K — *компактная подгруппа группы* $\mathfrak{G}$, *а каждое* V_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ *является неприводимым вполне геодезическим подмногообразием в* $\mathfrak{G}$ *и не является подгруппой в* $\mathfrak{G}$. *Это разложение обладает следующим свойством: если* $A(V) = \bigcap_{(\alpha)} \mathfrak{G}_\alpha$, *то подгруппа* $A(V)$ *компактна и полупроста, а универсальная накрывающая* $A(V)$ *изоморфна прямому произведению групп:* $\tilde{A}(V) \cong K \times \tilde{I}_0(V_1) \times \ldots \times \tilde{I}_0(V_r)$.

Из этой теоремы следует, что V реализует нетривиальный цикл в $\mathfrak{G}$ тогда и только тогда, когда все V_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ и K (предполагается, что K и V_i отличны от точки) реализует нетривиальные циклы в $\mathfrak{G}$ над $\mathbf{R}$. Поскольку случай $V = K$ уже рассмотрен выше, то наша исходная задача сводится к исследованию с гомологической точки зрения вложений $V \to I_0(V)$, где V — неприводимое компактное симметрическое пространство. Хорошо известно ([2]), что любое симметрическое пространство V может быть вложено в $I_0(V)$ как вполне геодезическое подмногообразие («картановская модель»). Все компактные симметрические пространства разбиваются на два класса: пространства типа I и пространства типа II ([1]), поэтому решение нашей первой задачи мы представим в следующем виде: для каждого неприводимого компактного симметрического пространства V мы укажем тот цикл, который оно реализует в группе изометрий $I_0(V)$.

Теорема 2. *Пусть* i: $V \to I_0(V)$ — *вложение компактного неприводимого симметрического пространства* V *как вполне геодезического подмногообразия в максимальную группу изометрий* $I_0(V)$. *Тогда это вложение картановское и ниже перечислены гомологические характеристики этих вложений:*

1) *Любое пространство* V *типа* II *всегда реализует нетривиальный цикл в* $H_*(I_0(V); \mathbf{R})$.

2) *Из пространств* V *типа* I *только следующие пространства реализуют нетривиальные циклы в* $H_*(I_0(V); \mathbf{R})$: 2a) $V = {}^0A_{2m}\,\mathrm{I}$, $m \geqslant 1$; 2b) $V = {}^0A_{2m-1}\mathrm{II}$, $m \geqslant 2$; 2c) $V = {}^0D_l\mathrm{II}$, $l \geqslant 4$; 2d) $V = {}^0E_6\mathrm{IV}$.

Для всех остальных пространств V *типа* I $i([V]) = 0$.

Если V — односвязно, то имеет место более полное утверждение для пространств типа I, реализующих нетривиальные циклы в $H_*(I_0(V); \mathbf{R})$.

Теорема 3. *Пусть* $V \to \tilde{I}_0(V)$ *есть вложение компактного неприводимого односвязного симметрического пространства типа* I *как вполне геодезического подмногообразия в* $\tilde{I}_0(V)$.

1) $V = \mathrm{SU}(2m+1)/\mathrm{SO}(2m+1)$, $m \geqslant 1$, $({}^0A_{2m}\mathrm{I})$; *пусть* $C = x_5x_9x_{13}\ldots x_{4m+1} \in H^*(\tilde{I}_0(V); \mathbf{Z}_p)$, $p \neq 2$ *и простое, если* $p \neq 0$. *Тогда:* $[V] = i^*(N^{-1}C)$, где $N = 2^m (\mathrm{mod}\, p)$.

2) $V = \mathrm{SU}(2m)/\mathrm{Sp}(2m)$, $m \geqslant 2$, $({}^0A_{2m-1}\mathrm{II})$; *пусть* $C = x_5x_9x_{13}\ldots x_{4m-3} \in H^*(\tilde{I}_0(V); \mathbf{Z})$. *Тогда* $i^*(C) = N[V]$, *где* $N = 2^{m-1}$.

3) $V = \mathrm{SO}(2l)/\mathrm{SO}(2l-1)$, $l \geqslant 4$, $({}^0D_l\mathrm{II})$; *пусть* $C = \bar{x}_{2l-1} \in H^*(\tilde{I}_0(V); \mathbf{Z}_p)$, $p \neq 2$ *и простое, если* $p \neq 0$. *Тогда:* $[V] = i^*({}^1/_2C)$.

4) $V = E_6/F_4({}^0E_6IV)$; *пусть* $C = x_9 - x_{17} \in H^*(\tilde{I}_0(V); \mathbf{Z}_p)$, $p \geqslant 7$, *и простое, если* $p \neq 0$. *Тогда* $[V] = i^*({}^1/_4C)$.

Замечание. В качестве образующих $\{x_\alpha\} \in H^*(I_0(V); G)$ выбраны канонические примитивные образующие.

Пусть V вложено в $\tilde{A}(V)$ и $V = K \times V'$ — указанное в теореме 1 разложение; пусть $\mathfrak{H}$ — стационарная подгруппа многообразия V'.

Следствие 1. *Многообразие* V *при вложении* $V \to \tilde{A}(V)$ *реализует нетривиальный цикл в* $H_*(\tilde{A}(V); R)$ *тогда и только тогда, когда подгруппа* $K \times \mathfrak{H}$ *вполне негомологична нулю в* $\tilde{A}(V)$ *для вещественных коэффициентов.*

4. При доказательстве теорем 2 и 3 используется конструкция, связанная с картановской моделью $V \subset I_0(V)$. Пусть σ — инволютивный авто-

морфизм группы $I_0(V)$, определяющий пространство V, т. е. множество точек g, $\sigma(g) = g$, есть подгруппа $\mathfrak{H}$, где $V = I_0(V) / \mathfrak{H}$. Тогда отображение $p\colon I_0(V) \to V$, $p(g) = g\sigma(g^{-1})$ [1] определяет главное расслоенное пространство $\mathfrak{H} \to I_0(V) \to V$. Если $i\colon V \to I_0(V)$ — вложение, то $f = pi$ есть «возведение в квадрат» многообразия V: $f(v) = v^2$, $v \in V$. Оказывается, что V реализует нетривиальный цикл в $I_0(V)$ тогда и только тогда, когда $\deg f \neq 0$, что сводит исходную задачу к подсчету числа $\deg f$. Оказывается, что это число тесно связано с геометрией симметрических пространств. Исследование пространства ${}^{0}E_6\mathrm{IV}$ производится при помощи свойств йордановой алгебры M_3^8 (см. [4]).

Следствие 2. *Пусть V — односвязное вполне геодезическое подмногообразие в произвольной компактной группе Ли $\mathfrak{G}$. Предположим, что V реализует когомологическую образующую в кольце $H^*(\mathfrak{G}; \mathrm{R})$. Тогда V диффеоморфно одному из следующих многообразий: S^{2l-1}, $l \geqslant 2$; $\mathrm{SU}(3) / \mathrm{SO}(3)$, причем каждое из этих многообразий V реализует образующую в $H^*(I_0(V); \mathrm{R})$.*

Геометрический смысл следствия 1 проясняется следующим образом.

Следствие 3. *Пусть $V = V'$ (см. теорему 1) и $\mathfrak{H} \subset \tilde{A}(V)$ есть стационарная подгруппа многообразия V. Если через $\operatorname{ind}(x, y)$ обозначить индекс пересечения двух циклов x и y дополнительной размерности, то $\operatorname{ind}(i_*([V]), j_*([\mathfrak{H}'])) = \deg f$ для некоторого класса смежности $\mathfrak{H}' = g_0\mathfrak{H}$.*

Поскольку любое симметрическое пространство $\mathfrak{M}^n$ можно вложить как картановскую модель в группу $I_0(\mathfrak{M}^n)$, то наша первая задача для произвольного симметрического пространства сводится к разобранному выше случаю $\mathfrak{M}^n = \mathfrak{G}$.

5. Пусть $\mathfrak{M}^n$ — компактное симметрическое пространство, рассмотрим группу $\pi_*(\mathfrak{M}^n) \otimes \mathrm{Q}$, $\pi_*(\mathfrak{M}^n) = \bigoplus\limits_i \pi_i(\mathfrak{M}^n)$, где $\pi_i(\mathfrak{M}^n)$ — гомотопические группы пространства $\mathfrak{M}^n$. Рассмотрим вторую задачу (см. выше), выбрав в качестве представляющего подмногообразия сферу S^p; т. е. решим вопрос, какие нетривиальные элементы группы $\pi_*(\mathfrak{M}^n) \otimes \mathrm{Q}$ могут быть реализованы вполне геодезическими сферами. Если мы потом положим $\mathfrak{M}^n = \mathfrak{G}$, то автоматически получим полное описание циклов $x \in H^*(\mathfrak{G}, \mathrm{Q})$, $x \neq 0$, реализуемых вполне геодезическими сферами.

Обозначим через $Q_N(\mathfrak{M}^n) = (\pi_*(\mathfrak{M}^n) \otimes \mathrm{Q})_N$ подгруппу в $\pi_*(\mathfrak{M}^n) \otimes \mathrm{Q}$, образованную всеми элементами x, $\dim x \leqslant N$. Рассмотрим целое число n и положим $k = k(n) = [1 + \log_2 n]$. Определим функцию:

$$f_i(n) = f_i(2^{k-1}) = \begin{cases} 2k - i - 1, & \text{если } k \equiv 0 (\operatorname{mod} 4); \\ 2k - i - 3, & \text{если } k \equiv 1 (\operatorname{mod} 4); \\ 2k - i - 5, & \text{если } k \equiv 2 (\operatorname{mod} 4); \\ 2k - i - 3, & \text{если } k \equiv 3 (\operatorname{mod} 4). \end{cases}$$

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{G}$ есть одна из следующих групп: $\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{Sp}(2n)$; $H^*(\mathfrak{G}; \mathrm{Q}) = \Lambda(x_{2h_1-1}, \ldots, x_{2h_R-1})$, $R = \operatorname{rank} \mathfrak{G}$. Тогда единственными элементами $x \in H^*(\mathfrak{G}; \mathrm{Q})$, $x \neq 0$, реализующими вполне геодезическими сферами в группе $\mathfrak{G}$, являются следующие элементы:*

1) если $\mathfrak{G} = \mathrm{SU}(n)$, $n \geqslant 2$, то $\{x_3, x_5, x_7, \ldots, x_{2k(n)-1}\}$;

2) если $\mathfrak{G} = \mathrm{SO}(n)$, $n \geqslant 8$, то $\{x_{4\alpha-1}\}$, где $3 \leqslant 4\alpha - 1 \leqslant f_0(n)$;

3) если $\mathfrak{G} = \mathrm{Sp}(2n)$, $n \geqslant 1$, то $\{x_{4\alpha-1}\}$, где $3 \leqslant 4\alpha - 1 \leqslant f_4(8n)$.

Замечание. Если $\mathfrak{G} = \mathrm{SO}(n)$, то формулировку теоремы 4 можно несколько видоизменить: *вполне геодезическими сферами в группе $\mathrm{SO}(n)$ реализуются только элементы $\{x_{4\alpha-1}\}$, где $3 \leqslant 4\alpha - 1 \leqslant s(2^{h(n)-1})$; здесь через $s(p)$ обозначено максимальное число линейно независимых векторных полей на сфере S^{p-1}. Отметим, что $f_0(n) \leqslant s(2^{h(n)-1})$.*

6. Теорема 5. *Пусть V — компактное неприводимое симметрическое пространство типа I, группа движений которого $I_0(V)$ не является особой группой Ли. Тогда единственными элементами группы $\pi_*(V) \otimes Q$, реали-*

зующимися вполне геодезическими сферами, являются следующие элементы (здесь $k = k(n)$):

1) *если* $V = SU(2n)/S(U(n) \times U(n))$, $k \geqslant 3$, $Q_{2k}(V) = \bigoplus_{1 \leqslant \alpha \leqslant k} \mathbf{Q}(x_{2\alpha})$; *то* $\{x_{2\alpha}\}$, *где* $1 \leqslant \alpha \leqslant k$.

2) *если* $V = SO(2n)/S(O(n) \times O(n))$, $k \geqslant 6$, $Q_{2k}(V) = \bigoplus_{1 \leqslant \alpha \leqslant k/2} \mathbf{Q}(x_{4\alpha})$; *то* $\{x_{4\alpha}\}$, *где* $4 \leqslant 4\alpha \leqslant f_7(16n)$.

3) *если* $V = Sp(2n)/Sp(n) \times Sp(n)$, n — *четно*, $k \geqslant 8$, $Q_{2k}(V) = \bigoplus_{1 \leqslant \alpha \leqslant k/2} \mathbf{Q}(x_{4\alpha})$; *то* $\{x_{4\alpha}\}$, *где* $4 \leqslant 4\alpha \leqslant f_3(4n)$.

4) *если* $V = SU(n)/SO(n)$, $k \geqslant 5$, $Q_{2k-1}(V) = \bigoplus_{1 \leqslant \alpha \leqslant (k-1)/2} \mathbf{Q}(x_{4\alpha+1})$; *то* $\{x_{4\alpha+1}\}$, *где* $5 \leqslant 4\alpha + 1 \leqslant f_6(8n)$.

5) *если* $V = SU(2n)/Sp(2n)$, $k \geqslant 5$, $Q_{2k+1}(V) = \bigoplus_{1 \leqslant \alpha \leqslant k/2} \mathbf{Q}(x_{4\alpha+1})$; *то* $\{x_{4\alpha+1}\}$, *где* $5 \leqslant 4\alpha + 1 \leqslant f_2(4n)$.

6) *если* $V = SO(2n)/U(n)$, $k \geqslant 5$, $Q_{2k}(V) = \bigoplus_{1 \leqslant \alpha \leqslant (k-1)/2} \mathbf{Q}(x_{4\alpha+2})$; *то* $\{x_{4\alpha+2}\}$, *где* $2 \leqslant 4\alpha + 2 \leqslant f_1(2n)$.

7) *если* $V = Sp(2n)/U(n)$, $k \geqslant 5$, $Q_{2k}(V) = \bigoplus_{1 \leqslant \alpha \leqslant (k-1)/2} \mathbf{Q}(x_{4\alpha+2})$; *то* $\{x_{4\alpha+2}\}$, *где* $2 \leqslant 4\alpha + 2 \leqslant f_5(8n)$.

Замечание. В теореме 5 представлены все серии компактных симметричных пространств V, для которых $I_0(V)$ не есть особая группа Ли. Впрочем, техника, с помощью которой получена теорема 5, позволяет легко решить вопрос и в случае особых групп. Теорему реализации для многообразий $\mathfrak{G}_{n,k}(F)$, где F — **R**, **C**, **H**, можно получить из пунктов 1), 2), 3) теоремы 5, используя взаимные включения грассмановых многообразий.

Доказательство теорем 4, 5 использует результаты, изложенные в ([3]), и разбивается на две части: построение реализаций и доказательство единственности (с точностью до множителя $q \neq 0$, $q \in \mathbf{Q}$) тех элементов, которые эту реализацию допустили. Результаты ([3]) дополняются построением еще одной вполне геодезической сферы S^{2k-1}, реализующей нетривиальный цикл в $H_*(SO(n); \mathbf{Q})$, где $k = [1 + \log_2 n]$, $k \geqslant 4$, $k \equiv 0 \pmod 4$.

Это построение, а также доказательства второго пункта, существенно используют теорию спинорных представлений ортогональной группы и теорему 1. Отметим, что отсутствие циклов, реализуемых вполне геодезическими сферами, в размерностях, больших, чем указанные в теоремах 4, 5 границы ($\sim 2\log_2 n$), связано с тем, что все симметрические пространства вообще не содержат никаких вполне геодезических сфер, начиная примерно с этих размерностей.

Автор выражает глубокую благодарность проф. П. К. Рашевскому за постоянное внимание к настоящей работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
24 IV 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Хелгасон, Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, М., 1964. [2] Э. Картан, Геометрия групп Ли и симметрические пространства, ИЛ, 1949. [3] А. Т. Фоменко, ДАН, 190, № 4 (1970). [4] N. Jacobson, J. reine u. angew. Math., 204, 74 (1960).