Доклады Академии наук СССР
1971. Том 197, № 2

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

А. К. ГУЩИН, В. П. МИХАЙЛОВ

О СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 16 X 1970)

Пусть $u(x, t)$ — ограниченное решение для $t > 0$, $x \in R_1 = (-\infty, +\infty)$ параболического уравнения

$$p(x)u_t = u_{xx}, \tag{1}$$

удовлетворяющее при $t = 0$ начальному условию

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \tag{2}$$

с непрерывной и ограниченной функцией $\varphi(x)$. Коэффициент $p(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера порядка $\alpha > 0$, и существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что

$$\gamma^{-2} \leqslant p(x) \leqslant \gamma^2 \tag{3}$$

для всех $x \in R_1$.

В заметке (1) нами установлено необходимое и достаточное условие на функцию $\varphi(x)$, чтобы решение $u(x, t)$ стабилизировалось при $t \to \infty$. А именно, в (1) доказано, что выполнение условия

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \varphi(\xi + x)\,d\xi \to A \quad \text{при} \quad T \to \infty, \tag{4}$$

равномерное по $x \in K \subset R_1$ (K — любой компакт) или равномерное по $x \in R_1$, необходимо и достаточно, чтобы существовал предел

$$\lim_{t\to\infty} u(x, t) = A, \tag{5}$$

равномерный по x из любого компакта, или по $x \in R_1$ соответственно. При этом функция $p(x)$ дополнительно к тому, что о ней было сказано выше, предполагается стремящейся к некоторой постоянной $c^2 > 0$ при $|x| \to \infty$ в следующем смысле: равномерно по $x \in R_1$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} |p(x + \xi) - c^2|\,d\xi = 0. \tag{*}$$

(В заметке (1) получен соответствующий результат для случая n пространственных переменных $x = (x_1, \ldots, x_n)$, уравнение (1) в этом случае имеет вид $p(x)u_t = \Delta u$. Здесь сформулирован лишь тот результат из (1), который непосредственно относится к теме данной статьи.)

Ниже будут получены аналогичные результаты при, как нам кажется, значительно меньших и более естественных предположениях относительно функции $p(x)$.

Теорема 1. *Пусть функция $p(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера, неравенствам* (3) *и равномерно по $x \in R_1$ соотношению*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} p(\xi + x)\,d\xi = c^2. \tag{6}$$

Тогда необходимым и достаточным условием равномерной по $x \in R_1$ (равномерной по x из любого компакта $K \subset R_1$) стабилизации решения $u(x, t)$ задачи (1), (2) *при $t \to \infty$ является условие*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2Tc^2} \int_{-T}^{T} \varphi(x+\xi)\, p(x+\xi)\, d\xi = A,$$

выполненное равномерно по $x \in R_1$ (соответственно равномерно по x из любого компакта). При этом имеет место соотношение (5).

Теорема 1 имеет более широкую область применимости по сравнению с соответствующим (одномерным) результатом в ([1]). Например, удовлетворяющая условию (6) функция $2 + \cos x$ не удовлетворяет соотношению (*) ни при каком c. Более того, для применимости теоремы 1 в качестве функции $p(x)$ можно брать, в частности, любые, удовлетворяющие неравенствам (3) вещественно значные почти периодические функции вида $c^2 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e^{i\lambda_k x}$ с такими $\lambda_k \neq 0$ и c_k, чтобы этот ряд достаточно хорошо сходился.

Рассмотрим теперь случай, когда (6) не имеет места, но вместо этого существуют односторонние пределы

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{0}^{T} p(\xi)\, d\xi = a^2, \quad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^{0} p(\xi)\, d\xi = b^2 \tag{7}$$

при некоторых $a > 0$ и $b > 0$. Обозначим через $p_0(\xi)$ функцию, равную a^2 при $\xi > 0$ и b^2 при $\xi < 0$.

Теорема 2. *Пусть функция $p(x)$ удовлетворяет неравенствам* (3) *и условию Гёльдера, и для нее существуют пределы* (7).

Тогда необходимым и достаточным условием выполнимости соотношения (5) *равномерно по x из любого компакта является существование предела*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T(a+b)} \int_{-T/b}^{T/a} \varphi(\xi)\, p(\xi)\, d\xi = A. \tag{8}$$

Теорема 2 в известном смысле является точной. А именно, имеет место

Теорема 3. *Если функция $p(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2 и*

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left(p(x+\xi) - p_0(x+\xi)\right) d\xi \to 0$$

при $T \to \infty$ равномерно по $x \in R_1$, а вместо соотношения (8) *имеет место более сильное, равномерное по $x \in R_1$, соотношение*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T(a+b)} \int_{-T/b}^{T/a} p(x+\xi)\, \varphi(x+\xi)\, d\xi = A, \tag{9}$$

то и тогда при $A \neq 0$ равенство (5) *выполняется лишь в смысле равномерной сходимости на любом компакте, по неравномерной для всех $x \in R_1$. Если же в* (9) $A = 0$, *то* (5) *выполняется равномерно для всех $x \in R_1$.*

Для доказательства этих результатов рассмотрим следующую модельную задачу Коши

$$p_0(x)\, v_t = v_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in R_1, \tag{10}$$

$$v|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in R_1, \tag{11}$$

где $\varphi(x)$ — произвольная непрерывная для $x \neq 0$, ограниченная для $x \in R_1$ функция. Под решением задачи (10), (11) понимаем функцию $v(x, t)$, непрерывную для $t \geqslant 0$, $|x| + t > 0$, имеющую для $t > 0$, $x \neq 0$ все входящие в (10) производные и удовлетворяющую для этих t и x уравнению (10). При $t > 0$ будем считать функцию $v(x, t)$ непрерывно дифференцируемой по x. Явный вид решения этой задачи позволяет доказать следующую лемму.

Лемма 1. *Необходимым и достаточным условием выполнимости равномерно по x из любого компакта соотношения* (5) *для решения $v(x, t)$ задачи* (10), (11) *является условие* (8), *в котором функция $p(x)$ заменена функцией $p_0(x)$. С другой стороны, если даже равномерно по $x \in R_1$ выполнено* (9) (*с заменой функции $p(x)$ функцией $p_0(x)$*) *и $a \neq b$, то равномерная для $x \in R_1$ стабилизация при $t \to \infty$ функции $v(x, t)$ может быть лишь для $A = 0$.*

Функция $\tilde{u}(x, \lambda) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} u(x, t)\, dt$ при $\operatorname{Re} \lambda > 0$, $x \in R_1$, являясь ограниченным решением уравнения $-\tilde{u}'' + \lambda p_0(x)\tilde{u} = p(x)\varphi(x) - \lambda q(x)\tilde{u}$, при $q(x) \equiv p(x) - p_0(x)$ одновременно является и решением интегрального уравнения

$$\tilde{u} = L(\lambda)\tilde{u} + \tilde{v}_1, \tag{12}$$

где оператор $L(\lambda)$ задается формулой

$$L(\lambda) f = -\frac{\sqrt{\lambda p_0(x)}}{a+b} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{q\left(\sqrt{\frac{p_0(x)}{p_0(\xi)}}\,\xi\right) f\left(\sqrt{\frac{p_0(x)}{p_0(\xi)}}\,\xi\right)}{\sqrt{p_0(\xi)}} e^{-\sqrt{\lambda p_0(x)}(|x| + |\xi|)}\, d\xi -$$

$$- \frac{\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{p_0(x)}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} q(|\xi| \operatorname{sgn} x) f(|\xi| \operatorname{sgn} x) \operatorname{sgn} x \operatorname{sgn} \xi\, e^{-\sqrt{\lambda p_0(x)}\,|x-\xi|}\, d\xi,$$

а функция $\tilde{v}_1(x, \lambda)$ есть преобразование Лапласа по t решения $v_1(x, t)$ задачи (10), (11) с начальной функцией в (11) $\varphi_1(x) \equiv p(x)\varphi(x) / p_0(x)$.

Обозначим через $C(R_1)$ банахово пространство непрерывных ограниченных на R_1 функций с нормой $\|f\|_{C(R_1)} = \sup\limits_{x \in R_1} |f|$.

Лемма 2. *Для $|\arg \lambda| \leqslant \pi - \sigma$ при произвольном $\sigma > 0$ оператор $L(\lambda)$ из $C(R_1)$ в $C(R_1)$ ограничен. Если имеют место соотношения* (7), *то для любой функции $f(x) \in C(R_1)$ $\lim\limits_{\lambda \to 0} L^2(\lambda) f = 0$ равномерно по x из любого компакта. Если же равномерно по $x \in R_1$ выполнено условие*

$$\frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} q(x + \xi)\, d\xi \to 0 \quad (T \to \infty), \tag{13}$$

то $\|L^2(\lambda)\|_{C \to C} \to 0$ при $\lambda \to 0$.

В силу леммы 2 уравнение (12) эквивалентно уравнению

$$\tilde{u} = L^2(\lambda)\tilde{u} + L(\lambda)\tilde{v}_1 + \tilde{v}_1,$$

поэтому с помощью леммы 2 можно установить следующую лемму, если воспользоваться тауберовой теоремой Винера ([2]).

Лемма 3. *Если выполнены соотношения* (7), *то равномерно по x из любого компакта*

$$\lim \frac{1}{t} \int\limits_0^t (u(x, t) - v_1(x, t))\, dt = 0. \tag{14}$$

Если же выполнено условие (13), *то соотношение* (14) *выполняется равномерно по $x \in R_1$.*

Тем же методом, что и в работе ([1]), можно доказать, что $|u| \leqslant c / t$ для $t \geqslant t_0 > 0$, где t_0 и c — некоторые постоянные. Непосредственным подсчетом проверяется, что и $|v_{1t}| \leqslant c / t$ для $t \geqslant t_0$. Поэтому, так же как и в (1), из леммы 3 вытекает

Лемма 4. *Равномерно по* $x \in R_1$ *при выполнении условия* (13) *и по* $x \in K \subset R_1$ *при* (7)

$$\lim_{t \to \infty} (u(x, t) - v_1(x, t)) = 0.$$

Теоремы 1, 2 и 3 являются следствиями лемм 1 и 4.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
14 X 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. К. Гущин, В. П. Михайлов, ДАН, 194, № 3 (1970). [2] Н. Винер, Интеграл Фурье и некоторые его приложения, М., 1963.