Доклады Академии наук СССР
1971. Том 197, № 2

УДК 517.946 *МАТЕМАТИКА*

С. Д. ИВАСИШЕН

СОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ ГРИНА. ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С НОРМАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 7 VIII 1970)

В работах [1,2] было проведено построение и детальное исследование оператора Грина общей граничной задачи для параболических по И. Г. Петровскому систем. Здесь методом, аналогичным методу работы [3], изучается сопряженный оператор Грина и с его помощью исследуются обобщенные решения параболических граничных задач, удовлетворяющих условиям нормальности. Попутно устанавливается ряд, как нам представляется, важных фактов: параболичность сопряженной задачи, точная теорема о действии операторов Грина, полезные свойства матрицы Грина нормальных граничных задач.

Будем пользоваться, в основном, такими же обозначениями, как в [2].

1. Сопряженные операторы Грина. В области $Q_0 = [0, T] \times \Omega_0$, где Ω_0 — ограниченная область с гладкой границей Ω_1 в пространстве $\mathbf{E}_n$, рассмотрим параболическую граничную задачу

$$Lu \equiv \Big(D_t - \sum_{|k| \leqslant 2b} a_k(t,x) D_x^k\Big) u = f_0(t,x),$$

$$B_j u|_{Q_1} \equiv \sum_{|k| \leqslant r_j} b_{jk}(t,x) D_x^k u|_{Q_1} = f_j(t,x), \quad j = 1, \ldots, bN = m,$$

$$u|_{t=0} = f_{m+1}(x), \tag{1}$$

или кратко

$$Lu = F, \quad F = (f_0, \ldots, f_{m+1}),$$

где a_k — матрицы размеров $N \times N$, b_{jk} — матрицы-строки длины N; u, f_0, f_{m+1} — матрицы-столбцы высоты N; $Q_1 = [0, T] \times \Omega_1$, $r_j \leqslant 2b - 1$.

Предположим, что для задачи (1) выполнены условия (A) и (B_l) из [2], где $l \geqslant 2l_0 + 1$, $l_0 = \max\limits_j (2b - r_j)$. При этих предположениях в [1,2] построена матрица Грина

$$G(P, M) = \{G_0(P, M), \ldots, G_m(P, M)\}, \quad P = (t, x), \ M = (\tau, y),$$

задачи (1).

Если F достаточно гладкая, то функция

$$u(P) = \int_0^t d\tau \int_{\Omega_0} G_0(P, M) f_0(M)\, dy + \sum_{j=1}^m \int_0^t d\tau \int_{\Omega_1} G_j(P, M) f_j(M)\, dy +$$

$$+ \int_{\Omega_0} G_0(P; 0, y) f_{m+1}(y)\, dy \equiv \sum_{j=0}^{m+1} G_j f_j \equiv GF \tag{2}$$

является решением задачи (1). Оператор G будем называть оператором Грина задачи (1).

Рассмотрим операторы

$$G_j^*\varphi = \int_\tau^T d \int_{\Omega_0} \overline{G}_j'(P, M)\,\varphi(P)\,dx, \quad j = 0, 1, \ldots, m, \tag{3}$$

где штрих означает транспонирование, а черта — комплексное сопряжение. Они являются сопряженными к операторам G_j: для любых достаточно гладких f и φ справедливы равенства

$$(G_0 f, \varphi)_0 = (f, G_0^*\varphi)_0, \quad (G_j f, \varphi)_0 = (f, G_j^*\varphi)_1, \quad j = 1, \ldots, m,$$

где

$$(u, v)_i = \int_0^T dt \int_{\Omega_i} u'(P)\,\bar{v}(P)\,dx, \quad i = 0, 1. \tag{4}$$

Будем использовать следующие классы функций: $H_i^{k+\alpha}, \mathring{H}_i^{k+\alpha}, i = 0, 1$, из (2); $\mathring{H}_0^{k+\alpha, r}$, $2b - k - 2 \leqslant r \leqslant 2b - 1$, — множество функций из $\mathring{H}_0^{k+\alpha}$, которые вместе с производными по x до порядка $2b - r - 2$ обращаются в нуль на Q_1; $\mathring{H}_0^{k+\alpha, 2b-1} = \mathring{H}_0^{k+\alpha}$.

Теорема 1. *Пусть $k \leqslant l - 2b$ и r — максимальный порядок производной по нормали к Ω_1, содержащейся в B_j. Операторы G_j^*, $j = 0, \ldots, m$, действуют из $\mathring{H}_0^{k+\alpha}$ в $\mathring{H}_0^{2b+k+\alpha, r}$ при $j = 0$ и в $\mathring{H}_1^{r_j+k+1+\alpha}$* при $j > 0$ *и ограничены.*

Обозначим через $C(P, D_x)$ дифференциальный оператор порядка $p \leqslant 2b - 1$, коэффициенты которого определены на Q_1 и который функции, определенные на Q_0, переводит в функции, определенные на Q_1. Пусть $(CG_j)^*$ — оператор, сопряженный к произведению операторов C и G_j.

Теорема 2. *Пусть $\max\limits_j(p - r_j) \leqslant k \leqslant l - 2b + p + 1$, $k \geqslant 0, p \leqslant 2b - 1$. Операторы $(CG_j)^*$ действуют из $\mathring{H}_1^{k+\alpha}$ в $\mathring{H}_0^{2b-p+k-1+\alpha}$ при $j = 0$ и в $\mathring{H}_1^{k+r_j-p+\alpha}$ при $j > 0$ и ограничены.*

2. Нормальные граничные задачи. Предположим, что в задаче (1) система граничных выражений нормальна в смысле (4). В этом случае при естественных предположениях о гладкости Ω_1 и коэффициентов выражений L и B_j справедлива формула Грина

$$(Lu, v)_0 + \sum_{j=1}^m (B_j u, C_j' v)_1 + [u, v]_0 = (u, L^* v)_0 + \sum_{j=1}^m (C_j u, B_j' v)_1 + [u, v]_T, \tag{5}$$

где u, v — произвольные вектор-функции из H_0^{2b}; $(u, v)_i$, $i = 0, 1$, определены формулой (4), а

$$[u, v]_t = \int_{\Omega_0} u'(t, x)\,\bar{v}(t, x)\,dx;$$

C_j, C_j', B_j' — дифференциальные выражения порядков m_j, m_j', r_j' соответственно; L^* — выражение, формально сопряженное L.

Будем предполагать, что коэффициенты L^* и B_j' удовлетворяют условию ($B_{l'}$) с некоторым $l' \geqslant 2l_0' + 1$, $l_0' = \max\limits_j (2b - r_j')$.

Теорема 3*. *Если задача (1) нормальна и параболическая, то сопряженная задача*

$$L^* v = g_0(M), \quad B_j' v|_{Q_1} = g_j(M), \quad j = 1, \ldots, m, \quad v|_{\tau=T} = g_{m+1}(y), \tag{6}$$

также нормальна и параболическая (по отношению к $-\tau$).

* В случае общих эллиптических систем сопряженная задача подробно исследована в (4), в одном частном случае для параболических систем она изучалась в (5).

Нормальность системы $\{B_j'\}$ устанавливается так же, как в ([4]), а параболичность задачи (6) следует из таких соображений. Из формулы (5) для решений задачи (6) с $g_{m+1}\equiv 0$ получается представление с помощью операторов $G_0{}^*$ и $(C_jG_0)^*$, отсюда на основании теорем 1 и 2 следует априорная оценка решений, которая в силу результатов ([6, 7]) эквивалентна условию параболичности задачи (6).

С помощью формулы (5) получаются следующие свойства матриц Грина нормальных граничных задач:

1°. Если $G_0{}^*(P, M)$ — матрица Грина (по M) однородной задачи (6), то $G_0{}^*(P, M) = \overline{G}_0'(P, M)$.

2°. Для любой $u \in H_0{}^{2b}$ справедливо представление

$$u(P) = (G_0', \overline{Lu})_0 + \sum_{j=1}^{m} (\overline{C}_j'G_0', \overline{B_ju})_1 + [G_0', \bar{u}]_0. \tag{7}$$

3°. Справедлива формула свертки

$$G_0(t, x; \tau, y) = \int_{\Omega_0} G_0(t, x; \beta, \xi)\, G_0(\beta, \xi; \tau, y)\, d\xi, \quad \tau < \beta < t.$$

4°. $G_j(P, M) = [\overline{C}_j'(M, D_y)\, G_0'(P, M)]'$, $\quad j = 1, \ldots, m$.

Приведем еще теорему о действии оператора Грина G задачи (1). Обозначим через $H_L^{k+\alpha}$ совокупность $F = (f_0, \ldots, f_{m+1})$, принадлежащих прямой сумме

$$H_0^{k+\alpha} \dotplus \sum_{j=1}^{m} H_1^{2b-r_j+k+\alpha} \dotplus C^{2b+k+\alpha}(\Omega_0),$$

и таких, что f_j, как правые части задачи (1), удовлетворяют условиям согласования, необходимым для существования решения этой задачи из $H_0^{2b+k+\alpha}$. Используя априорные оценки ([8]) и формулу (7), приходим к следующему утверждению.

Теорема 4. *Оператор G действует из $H_L^{k+\alpha}$ на $H_0^{2b+k+\alpha}$ и ограничен, если $k \leqslant l - l_0$.*

3. Обобщение решения. Рассмотрим банаховы пространства обобщенных функций $H_i^{-(k+\alpha)}$, $H_0^{-(k+\alpha), r}$, $C^{-(k+\alpha), r}$, $H_{0, p}^{-(k+\alpha), r}$, являющиеся замыканиями множеств гладких функций, определенных в Q_i или Ω_0, соответственно по нормам

$$\|u\|^i_{-(k+\alpha)} = \sup_{\varphi \in \overset{\circ}{H}{}_i^{k+\alpha}} \frac{|(u, \varphi)_i|}{\|\varphi\|^i_{k+\alpha}}, \quad \|u\|^0_{-(k+\alpha), r} = \sup_{\varphi \in \overset{\circ}{H}{}_0^{k+\alpha, r}} \frac{|(u, \varphi)_0|}{\|\varphi\|^0_{k+\alpha}},$$

$$\|u\|^{\Omega_0}_{-(k+\alpha), r} = \sup_{\varphi \in C^{k+\alpha, r}} \frac{|[u, \varphi]|}{\|\varphi\|^{\Omega_0}_{k+\alpha}},$$

$$\|u\|^{0, p}_{-(k+\alpha), r} = \|u\|^0_{-(k+\alpha)} + \sum_{j=0}^{p} \|D_\nu^j u\|^1_{-(k+j+1+\alpha)} + \|u\|^{\Omega_0}_{-(2b+k+\alpha), r},$$

где $C^{k+\alpha, r}$, $2b - k - 2 \leqslant r \leqslant 2b - 1$, — множество функций из $C^{k+\alpha}(\Omega_0)$, которые вместе с производными до порядка $2b - 2 - r$ обращаются в нуль на Ω_1, $C^{k+\alpha, 2b-1} = C^{k+\alpha}(\Omega_0)$; D_ν означает дифференцирование по нормали к Ω_1. Введем еще пространство $H_L^{-(k+\alpha)}$, состоящее из

$$F = (f_0, \ldots, f_{m+1}) \in H_0^{-(2b+k+\alpha), r} \dotplus \sum_{j=1}^{m} H_1^{-(r_j+k+1+\alpha)} \dotplus C^{-(2b+k+\alpha), r}$$

таких, что $F^\nu = (f_0^\nu, \ldots, f_{m+1}^\nu) \in H_L$, если

$$\| F - F \|^L_{-(k+\alpha)} = \| f_0 - f_0^\nu \|^0_{-(2b+k+\alpha),\, r} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \| f_j - f_j^\nu \|^1_{-(r_j+k+1+\alpha)} + \| f_{m+1} - f_{m+1}^\nu \|^{\Omega_0}_{-(2b+k+\alpha),\, r} \to 0, \quad \nu \to \infty.$$

Назовем обобщенным решением задачи (1), где $F \in H_L^{-(k+\alpha)}$, элемент u из $H_0^{-(k+\alpha)}$, для которого существует последовательность $u^\nu \in \in H_0^{2b+\alpha}$, такая, что при $\nu \to \infty$

$$\| u - u^\nu \|^0_{-(k+\alpha)}, \quad \| F - Lu^\nu \|^L_{-(k+\alpha)} \to 0.$$

На основании теорем 1, 2 и 4 доказывается основная

Теорема 5. *Если* $F \in H_L^{-(k+\alpha)}$, $k \leqslant l - 2b$, *то существует единственное обобщенное решение задачи* (1), *принадлежащее* $H_{0,\,r}^{-(k+\alpha),\,r}$, *где* r — *максимальный порядок производной по нормали, содержащейся в* B_j. *Оператор* L *осуществляет гомеоморфизм* $H_{0,\,r}^{-(k+\alpha),\,r} \to H_L^{-(k+\alpha)}$.

Изложенные результаты справедливы для параболических по И. Г. Петровскому систем высшего порядка по t при совпадении старших порядков.

В заключение автор выражает глубокую благодарность С. Д. Эйдельману, под руководством которого он работает.

Киевское высшее инженерное радиотехническое
училище противовоздушной обороны

Поступило
3 VIII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Д. Ивасишен, С. Д. Эйдельман, ДАН, 172, № 6 (1967). [2] С. Д. Ивасишен, ДАН, 187, № 4 (1969). [3] Ю. П. Красовский, Изв. АН СССР, сер. матем., 33, 109 (1969). [4] Я. А. Ройтберг, З. Г. Шефтель, Матем. сборн., 78, 3, 466 (1969). [5] Б. Я. Липко, С. Д. Эйдельман, ДАН, 166, № 5 (1966). [6] М. С. Агранович, В. В. Сухорутченко, Матем. заметки, 2, 3, 613 (1967). [7] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, М., 1967. [8] В. А. Солонников, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 83, 3 (1965).