Доклады Академии наук СССР
1970. Том 195, № 4

УДК 519.210 *МАТЕМАТИКА*

Академик АН УзССР Т. А. САРЫМСАКОВ, Я. Х. КУЧКАРОВ

ОБ ЭРГОДИЧЕСКОМ ПРИНЦИПЕ ДЛЯ ЧАСТИЧНО ПОЛУГРУППОВОГО СЕМЕЙСТВА ОПЕРАТОРОВ НА ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛУПОЛЯХ

В этой статье будем придерживаться определений и обозначений работ ([1], [2]).

1. Пусть дано семейство $\{E_k,\ 1 \leqslant k \leqslant \infty\}$, где E_k — полное топологическое полуполе; K_k — конус неотрицательных элементов в E_k и ∇_k — топологическая алгебра Буля всех идемпотентов, на которой определена некоторая мера. Элементы E_k, для которых интеграл по этой мере существует, называются суммируемыми; множество их обозначим через L_k. Очевидно, L_k является линейным топологическим пространством в топологии, индуцированной из E_k. Элемент $x \in L_k \cap K_k$ назовем распределением, если $\mu(x) = 1$, где μ означает знак интеграла.

Введем обозначение

$$P_k = \{x{:}\ x \in L_k \cap K_k, \quad \mu(x) = 1\}.$$

Рассмотрим, вообще говоря, некоммутативное семейство $\{T_k^{[k+1]},\ 1 \leqslant \leqslant k \leqslant \infty\}$ линейных операторов, где $T_k^{[k+1]}{:}\ L_k \to L_{k+1}$ и $T_k^{[m]} = T_{m-1}^{[m]} \times \times T_{m-2}^{[m-1]} \cdots T_k^{[k+1]}$ $(k < m)$.

Определение 1. Линейный оператор $T_k^{[k+1]}$ $(1 \leqslant k \leqslant \infty)$ назовем стохастическим, если он удовлетворяет следующим условиям:

1) $T_k^{[k+1]}(L_k) \subset L_{k+1}$;
2) $\mu(T_k^{[k+1]}x) = \mu(x)$ для $x \in L_k$;
3) $T_k^{[k+1]}x^{(n)} \to T_k^{[k+1]}x^{(0)}$, если $x^{(n)} \to x^{(0)}$ $(x^{(0)},\ x^{(n)} \in L_k)$.

Здесь сходимость следует понимать в смысле топологии в E_k.

Определение 2. Семейство $\{T_k^{[k+1]},\ 1 \leqslant k \leqslant \infty\}$ стохастических операторов будем называть эргодическим, если при любом k и любых x, y из P_k и $g \in \nabla_2$ имеет место соотношение

$$\lim_{r \to \infty} \mu(g T_k^{[r]}(x - y)) = 0.$$

Будем говорить, что семейство $\{\widetilde{T}_k^{[k+1]},\ 1 \leqslant k \leqslant \infty\}$ операторов включает в себя семейство $\{T_k^{[k+1]},\ 1 \leqslant k \leqslant \infty\}$, если для некоторых $i_1, i_2, \ldots$ $\ldots, i_h, \ldots$ $(i_h = i_j$ при $h = j)$

$$\widetilde{T}_{i_h}^{[i_h+1]} = T_h^{[h+1]}.$$

Определение 3. Семейство $\{\widetilde{T}_k^{[k+1]}, 1 \leqslant k \leqslant \infty\}$ стохастических операторов будем называть сильно эргодическим, если любое семейство $\{\widetilde{T}_k^{[k+1]},\ 1 \leqslant k \leqslant \infty\}$ стохастических операторов, включающее в себя семейство $\{T_k^{[k+1]},\ 1 \leqslant k \leqslant \infty\}$, является эргодическим.

Условие А. Каковы бы ни были x, y из P_k, существуют натуральное число m, элементы $z \in L_m$, u и v из P_m, зависящие от x, y, и число $\lambda(T_k^{[m]})$ $(0 < \lambda(T_k^{[m]}) < 1)$ такие, что

$$T_k^{[m]}x - z = (1 - \lambda(T_k^{[m]}))\,u,$$

$$T_r^{[m]}y - z = (1 - \lambda(T_k^{[m]}))v,$$

причем $z < T_k^{[m]}x$, $z < T_k^{[m]}y$, $k = 1, 2, \ldots$

1.1. Если для семейства $\{T_k^{[k+1]}, 1 \leqslant k \leqslant \infty\}$ стохастических операторов выполнено условие (А), то имеет место равенство

$$T_1^{[n]}(x-y) = (1 - \lambda(T_1^{[m_1]}))(1 - \lambda(T_{m_1}^{[m_2]}))\cdots(1 - \lambda(T_{m_{h-1}}^{[m_h]}))\, T_{m_h}^{[m_h+r]}(u-v),$$

$x, y \in P_1$, $\quad u, v \in P_{m_h}$ для $n = m_1 + m_2 + \cdots + m_h + r$, $r < m_{h+1} - m_h$,

1.2. Если для семейства $\{T_k^{[k+1]}, 1 \leqslant k \leqslant \infty\}$ стохастических операторов выполнено условие (А) и ряд

$$\lambda(T_1^{[m_1]}) + \sum_{h=2}^{\infty} \lambda(T_{m_{h-1}}^{[m_h]}) = \infty, \tag{1}$$

то при любых x, y из P_1 имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \mu(gT_1^{[n]}(x-y)) = 0.$$

1.3. Для того чтобы семейство $\{T_k^{[k+1]}, 1 \leqslant k \leqslant \infty\}$ стохастических операторов, удовлетворяющих условию (А), было сильно эргодическим, необходимо и достаточно выполнение соотношения (1).

Все известные критерии эргодичности для неоднородных цепей Маркова (см. ([3]), ([4]), стр. 206), ([5,6]) являются достаточными условиями сильной эргодичности и представляют собой частные случаи условия (1). Из предложения 1.3, как следствие, вытекают результаты статей ([7]) (теорема 11), ([8]) (лемма 2), ([9]) (теорема 1).

2. Рассмотрим топологическое полуполе $E_k(t)$, зависящее от числового параметра t, и через $\mathscr{E}_k(t)$ обозначим прямую сумму

$$\mathscr{E}_k(t) = E_k(t) \oplus iE_k(t).$$

Как и в п. 1, предполагается, что на $\nabla_k(t)$ определена некоторая своя мера.

Пусть дано, вообще говоря, некоммутативное семейство линейных операторов $\{T_k^{[k+1]}(t), 1 \leqslant k \leqslant \infty\}$, где $T_k^{[k+1]}(t)$: $\mathscr{L}_k(t) \to \mathscr{L}_{k+1}(t)$ и $T_k^{[m]}(t) = T_{m-1}^{[m]}(t) \times T_{m-2}^{[m-1]}(t) \cdots T_k^{[k+1]}(t)$ для $k < m$. Здесь $\mathscr{L}_k(t)$ — множество суммируемых элементов комплексного полуполя $\mathscr{E}_k(t)$.

Определение 4. Семейство $\{T_k^{[k+1]}(t), 1 \leqslant k \leqslant \infty\}$ линейных операторов, непрерывно зависящее от числового параметра t, будем называть *семейством характеристических операторов*, если выполняются следующие соотношения:

1) $T_k^{[k+1]}(t)(\mathscr{L}_k(t)) \subset \mathscr{L}_{k+1}(t)$;
2) $T_k^{[k+1]}(0) = T_k^{[k+1]}$ — стохастический оператор;
3) $T_k^{[k+1]}(t)\, x^{(n)}(t) \to T_k^{[k+1]}(t)\, x^{(0)}(t)$, если $x^{(n)}(t) \to x^{(0)}(t)$ $(x^{(0)}(t), x^{(n)}(t) \in \mathscr{L}_k(t))$.

Если для семейства $\{T_k^{[k+1]}(t), 1 \leqslant k \leqslant \infty\}$ характеристических операторов выполнено условие, аналогичное (А), с учетом параметра t, то результаты 1.1 и 1.2 остаются справедливыми для этого семейства.

Из результатов п. 2, как следствие, вытекает результат статьи ([10]) (лемма 5).

Ташкентский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступило 19 V 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Я. Антоновский, В. Г. Болтянский, Т. А. Сарымсаков, Топологические алгебры Буля, Ташкент, 1963. [2] Т. А. Сарымсаков, Топологические полуполя и теория вероятностей, Ташкент, 1969. [3] Т. А. Сарымсаков, ДАН, 90, № 1, 25 (1953). [4] С. Н. Бернштейн, Курс теории вероятностей, Изд. 4-е, М.—Л., 1946. [5] А. Н. Колмогоров, УМН, 5, 3 (1938). [6] С. Х. Сираждинов, ДАН, 71, № 5, 829 (1950). [7] Р. Л. Добрушин, Теория вероятностей и ее применения, 1, в. 1, 4, 72 и 365 (1956). [8] Т. А. Сарымсаков, Там же, 6, в. 1, 194 (1961). [9] Т. А. Сарымсаков, Докл. АН УзССР, № 8, 3 (1956). [10] В. А. Статулявичюс, Литовск. матем. сборн., 1, 1—2, 231 (1961).