Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 1

УДК 511.42 *МАТЕМАТИКА*

А. В. СОКОЛОВСКИЙ

О МАЛЫХ РАЗНОСТЯХ МЕЖДУ «СОСЕДНИМИ» ПРОСТЫМИ ИДЕАЛАМИ

(Представлено академиком Ю. В. Линником 5 VI 1970)

Настоящая заметка посвящена оценке сверху величины

$$E_K = \varliminf_{m\to\infty} \frac{p_{m+1}-p_m}{n \ln p_m}, \quad \text{где} \quad p_1 < p_2 < \ldots \tag{1}$$

строго возрастающая последовательность норм простых идеалов первой степени фиксированного поля алгебраических чисел K степени n над полем рациональных чисел R и дискриминанта D. Доказательство основного результата проводится методом Харди — Литтлвуда, дополненным соображениями Бомбьери — Давенпорта в их работе [1] (см. также [2]).

Основное отличие последовательности (1) от последовательности всех простых чисел в этом плане состоит в том, что члены (1) распределены лишь по $\bar{\varphi}(q)$ допустимым для K классам вычетов по mod q ([3], а $\bar{\varphi}(q)$) не является, вообще говоря, мультипликативной функцией.

Обозначим через Q — множество всех тех натуральных q_i, для которых $(q_k, q_j) = 1$ влечет $\bar{\varphi}(q_k \cdot q_j) = \bar{\varphi}(q_k)\cdot\bar{\varphi}(q_j)$. Как известно, [3] $\bar{\varphi}(q) = \varphi(q) / \bar{q}$, где $\varphi(q)$ — функция Эйлера, а $\bar{q}$ — степень пересечения полей K и $R(\sqrt[q]{1})$. Очевидно, для любого K множество $Q_1 = \{q\colon (q, D) = 1 \text{ и } q = 2\}$ содержится в Q (заметим, что $1, 2 \in Q$).

Мы будем пользоваться обозначениями, принятыми в [1]:

$$Z(N, 2k) = \sum_{\substack{p_1,\, p_2 \leqslant N \\ p_1 - p_2 = 2k \\ p_i = N\gamma_i,\ \gamma_i \in K}} \ln p_1 \ln p_2; \qquad S(\alpha) = \sum_{\substack{p \leqslant N \\ p = N\gamma}} \ln p e^{2\pi i \alpha p}.$$

$$T(\alpha) = \sum_{k=-r}^{r} t(k) e^{4\pi i \alpha k} \geqslant 0; \qquad I(\beta) = \sum_{k \leqslant N} e^{2\pi i k \beta}.$$

Как и в [1,2], имеем, очевидно,

$$\int_0^1 |S(\alpha)|^2 T(\alpha)\, d\alpha = \frac{1}{n} t(0)(N \ln N + O(N)) + 2 \sum_{k=1}^{r} t(k) Z(N, 2k), \tag{2}$$

а также, в силу неотрицательности $T(\alpha)$,

$$\int_0^1 |S(\alpha)|^2 T(\alpha)\, d\alpha \geqslant \sum_{\substack{q \leqslant X \\ q \in Q}} \sum_{(a, q)=1} T(a/q) \int_{-\eta}^{\eta} |S(a/q+\beta)|^2 d\beta + O(\eta r^2 t(0) N \ln N) \tag{3}$$

лишь только $0 < \eta < 1/2X^2$.

Положим $\rho(k, q, m) = \begin{cases} \ln p - 1/n\bar{\varphi}(q), & \text{если} \quad k = p = N\gamma \equiv m \pmod{q}; \\ -1/n\bar{\varphi}(q) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$

При $(a, q) = 1$, $\alpha = \beta + a/q$ имеем

$$S\left(\beta + \frac{a}{q}\right) = \frac{1}{n\overline{\varphi}(q)} \sideset{}{'}\sum_{m(q)} e^{2\pi i am/q} I(\beta) + \sideset{}{'}\sum_{m(q)} e^{2\pi i am/q} \sum_{k\leqslant N} \rho(k, q, m)\, e^{2\pi i k\beta} + O(\ln q), \tag{4}$$

где Σ' означает, что суммирование ведется лишь по группе $\overline{Z}_q$ допустимых для K классов вычетов mod q.

Нам понадобится следующая лемма о равнораспределенности «в среднем» в прогрессиях последовательности (1).

Лемма 1. *Пусть*

$$E_K(N, q) = \max_{k\leqslant N} \max_{m\in \overline{Z}_q} \Big| \sum_{\substack{p\leqslant k \\ p=N\gamma\equiv m(q)}} \ln p - k/n\overline{\varphi}(q) \Big|.$$

Для любой постоянной $A > 0$ существует $B > 0$ такое, что

$$\sum_{q\leqslant N^{\gamma}/\ln^B N} E_K(N, q) \leqslant N/\ln^A N;$$

$\gamma = 1/2$ *при* $n = 1, 2, 3, 4$ *и при* $K = R(\sqrt[k]{1})$ *с любым* $k > 1$ *и* $\gamma = 2/n$ *при* $n > 4$.

Лемма 1 легко доказывается методом Бомбьери ([4]) в сочетании с замечанием Ю. В. Линника о том, что характер $\chi(\mathfrak{A}) = \chi_q(N\mathfrak{A})$ (χ_q — характер Дирихле) является характером группы классов идеалов поля K по модулю главного идеала (q) ([5]) и приближенным уравнением для L-рядов Гекке, равномерным по q ([6]). Простое применение «большого решета» в полях дало бы $\gamma = 1/2n$. Для круговых полей лемма является очевидным следствием «рациональной» теоремы Бомбьери. В приведенной здесь форме утверждение высказано А. И. Виноградовым (см. по этому поводу также ([7], [8])).

Заменяя в правой части (3) множество Q на Q_1, получаем в равенстве (4), в силу $\overline{\varphi}(q) = \varphi(q)$, для $q \in Q_1$: $\sideset{}{'}\sum_{m(q)} e^{2\pi i\, am/q} = \mu(q)$, $\mu(q)$ — функции Мёбиуса, что позволяет вести последующие рассуждения так же, как и в ([1]). На этом пути с использованием леммы 1 вместо теоремы Бомбьери о простых числах в прогрессиях может быть получена

Теорема 1. *Для любого поля алгебраических чисел K степени n и дискриминанта D*

$$E_K \leqslant 1 - \varphi(D)\gamma/Dn \qquad (\gamma \textit{ из леммы } 1).$$

Рассмотрим теперь случай поля K, для которого $\overline{\varphi}(q)$ мультипликативна (таковы, например, нормальные поля с простой нециклической группой Галуа; круговые поля $R(\sqrt[k]{1})$). В этом случае воспользуемся следующими вспомогательными утверждениями:

Лемма 2. *Если $\overline{\varphi}(q)$ — мультипликативна, то*

$$f(q) = \sum_{(a,q)=1} \Big| \sideset{}{'}\sum_{m(q)} e^{2\pi i\, am/q} \Big|^2 = \overline{\varphi}(q) \prod_{p^k // q} p^{k-1}(p - \widetilde{\varphi}(p^k)), \tag{5}$$

где

$$\widetilde{\varphi}(p^k) = \frac{1}{\overline{\varphi}(p^k)} \sideset{}{'}\sum_{m_1(p^k)} \sideset{}{'}\sum_{\substack{m_2(p^k) \\ m_2\equiv m_1(p^{k-1})}} 1.$$

Доказательство получается в силу мультипликативности изучаемой функции $f(q)$ из легко доказываемого при $q = p^k$ равенства (5).

Лемма 3. *Положим* $q = q'q''$ *так, что* $(q'', D) = 1$, *а* $p / q'' \to p / D$, *тогда, при* $\eta < 1/2X^2$

$$\int_0^1 |S(\alpha)|^2 T(\alpha)\, d\alpha \geqslant \frac{1}{n^2}(N + O(\eta^{-1})) \sum_{q \leqslant X} \frac{\mu^2(q')}{\varphi^2(q')\,\bar{\varphi}^2(q'')} \sum_{(a,q)=1} T\left(\frac{a}{q}\right) \times$$

$$\times \left| \sum_{m''(q'')}' e^{2\pi i\, am''/q''} \right|^2 - \frac{2}{n} \left| \sum_{q \leqslant X} \frac{\mu(q')}{\varphi(q')\,\bar{\varphi}(q'')} \sum_{(a,q)=1} \sum_{m''(q'')}' e^{2\pi i\, am''/q''} T\left(\frac{a}{q}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \int_{-\eta}^{\eta} \bar{I}(\beta) \sum_{m(q)}' e^{2\pi i\, am/q} \sum_{k \leqslant N} \rho(k, q, m)\, e^{2\pi i\, k\beta}\, d\beta \right| + O(\eta X^2 t(0)\, N \ln N). \qquad (6)$$

Лемма 3 доказывается, как и в ([1]), но с учетом мультипликативности функции $\sum\limits_{m(q)}' e^{2\pi i\, am/q}$.

Первое слагаемое в (6) рассчитывается с помощью леммы 2: оно

$$\geqslant \frac{\varphi(D)}{Dn^2}(N + O(\eta^{-1}))\, t(0) \sum_{q''/D} \frac{1}{\bar{\varphi}(q'')} \prod_{p^k // q} (p - \tilde{\varphi}(p^k)) \ln X + 4 \sum_{k=1}^{r} t(k)\, H_1(k),$$

где

$$2H_1(k) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\mu^2(q')}{\bar{\varphi}(q)} \sum_{(a,q)=1} e^{2\pi i\, a \cdot 2k/q} \left| \sum_{m''(q'')} e^{2\pi i\, am''/q''} \right|^2.$$

Второе слагаемое с помощью леммы 1 и очевидного замечания $\left| \sum\limits_{m''(q'')}' e^{2\pi i\, am''/q''} \right| \leqslant \varphi(D)$ оценивается, как и в ([1]), величиной $\ll \eta r t(0) N^2 (\ln N)^{3 - A/2}$.

Выбирая $X = N^{\gamma} / \ln^B N$ и $\eta = (\ln N)^{C+1} / N$ $(C < A)$ и собирая (2), (3), (6), получаем

$$\sum_{k=1}^{r} t(k)\, Z(N, 2k) > \frac{2N}{n^2} \sum_{k=1}^{r} t(k)\, H_1(k) - \frac{1}{2n}\left(1 - \frac{C_D \gamma}{n} + \varepsilon\right) t(0)\, N \ln N, \quad (7)$$

где

$$C_D = \frac{\varphi(D)}{D} \sum_{q''/D} \frac{1}{\bar{\varphi}(q'')} \prod_{p^k // q''} (p - \tilde{\varphi}(p^k)); \quad \varepsilon > 0.$$

Примем за $T(\alpha)$ ядро Фейера, т. е. $t(k) = r - |k|$, тогда неравенство (7) дает, с учетом $\sum\limits_{k=1}^{\nu} H_1(n) = \nu + O((\ln \nu)^2)$,

$$\sum_{k=1}^{r} (r - k)\, Z(N, 2k) > (1 - \varepsilon) \frac{r^2 N}{n^2} - \left[\frac{r}{2n}\left(1 - \frac{C_D \gamma}{n}\right) + \varepsilon \right] N \ln N. \quad (8)$$

Если выбрать $r \sim {}^1/_2 n(1 - C_D\gamma / n + 3\varepsilon) \ln N$ справа в (8) будет величина $> \varepsilon r^2 N$. Как и в (1), отсюда следует

Теорема 2. *Если поле алгебраических чисел* K *таково, что* $\varphi(q)$ — *мультипликативна, то* (C_D *определено в* (7))

$$E_K \leqslant 1 - \gamma C_D / n^2.$$

Следствие 1. *Если для любого натурального* q $K \cap R(\sqrt[q]{1}) = R$, *то* $E_K \leqslant 1 - \gamma / n$ (γ *из леммы* 1).

Действительно,

$$\tilde{\varphi}(q) = \varphi(q) \text{ и } C_D = \frac{\varphi(D)}{D} \sum_{q''/D} \frac{\mu^2(q'')}{\varphi(q'')} = 1.$$

Следствие 2. *Если* $K = R(\sqrt[k]{1})$, *то* $E_K \leqslant 1/2$.

Действительно,

$$n = \varphi(k),\ \tilde{\varphi}(q) = \varphi(q)/\varphi((q, k)), \quad C_D = \frac{\varphi(D)}{D} \sum_{q''/k} \varphi(q'') = \varphi(k), \quad \gamma = 1/2.$$

Таким образом, для соседних простых $p_i \equiv 1 \pmod{k}$

$$\lim_{m \to \infty} \frac{p_{m+1} - p_m}{\varphi(k) \ln p_m} \leqslant 1/2 \text{ (сравни с (}^2\text{))}.$$

Чтобы улучшить эти результаты методами работы ([1]), нужно получить хорошую константу в оценке сверху величины $z(N, 2k)$ методом решета А. Сельберга. Другие возможности связаны с уменьшением значения γ в лемме 1.

Ташкентский институт народного хозяйства

Поступило 18 V 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Bombieri, H. Davenport, Proc. Roy. Soc. A, 293, 1 (1966). [2] M. N. Huxley, Acta arithmetica, 15, 367 (1969). [3] Н. Чеботарев, Основы теории Галуа, ч. 2, 1937. [4] E. Bombieri, Mathematica, 12, 201 (1965). [5] E. Fogels, Acta arithmetica, 7, 87 (1962). [6] А. Ф. Лаврик, Изв. АН СССР, сер. матем., 31, № 2 (1967). [7] E. Fogels, Изв. АН ЛатвССР, сер. физ. и техн. наук, № 4 (1969). [8] М. Б. Барбан, ДАН, 172, № 5 (1967).