МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_57
EDN: FSGNTY

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

В.Г. Сафонов[1], **А.Н. Скиба**[2]

[1]*Институт математики Национальной академии наук Беларуси*, *Минск*
[2]*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины*

CHARACTERIZATION OF SOME CLASSES OF FINITE GROUPS

V.G. Safonov[1], **A.N. Skiba**[2]

[1]*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus*, *Minsk*
[2]*Francisk Skorina Gomel State University*

Аннотация. На протяжении всей статьи все группы конечны и G всегда обозначает конечную группу; $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел и $\sigma=\{\sigma_i \mid i\in I\}$ – произвольное разбиение множества $\mathbb{P}$. Под σ-*свойством* группы мы подразумеваем любое ее свойство, которое зависит от σ и которое не подразумевает никаких ограничений на σ. В статье анализируются дальнейшие приложения теории σ-свойств группы при изучении обобщенных T-групп и других классов конечных групп.

Ключевые слова: *конечная группа*, *σ-свойство группы*, *σ-субнормальная подгруппа*, *σ-перестановочная подгруппа*, *PσT-группа*.

Для цитирования: *Сафонов*, *В.Г.* Характеризация некоторых классов конечных групп / В.Г. Сафонов, А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 4 (61). – С. 57–64. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_57. – EDN: FSGNTY

Abstract. Throughout the paper, all groups are finite and G always denotes a finite group; $\mathbb{P}$ is the set of all primes and $\sigma=\{\sigma_i \mid i\in I\}$ is an arbitrary partition of $\mathbb{P}$. By a σ-*property* of a group we mean any property of it that depends on σ and that does not imply any restrictions on σ. In this paper, further applications of the theory of σ-properties of a group in the study of generalized T-groups and other classes of finite groups are analyzed.

Keywords: *finite group*, *σ-property of a group*, *σ-subnormal subgroup*, *σ-permutable subgroup*, *PσT-group*.

For citation: *Safonov*, *V.G.* Characterization of some classes of finite groups / V.G. Safonov, A.N. Skiba // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 4 (61). – P. 57–64. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_57 (in Russian). – EDN: FSGNTY

Введение

На протяжении всей статьи все группы и G всегда обозначает конечную группу; $L(G)$ – решетка всех подгрупп группы G. Более того, $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, а $\sigma=\{\sigma_i \mid i\in I\}$ – некоторое разбиение $\mathbb{P}$; $\pi\subseteq\mathbb{P}$ и $\pi'=\mathbb{P}\backslash\pi$. Если n – целое число, символ $\pi(n)$ обозначает множество всех простых чисел, делящих n; $\pi(G)=\pi(|G|)$ – это множество всех простых чисел, делящих порядок G; $\sigma(n)=\{\sigma_i \mid \sigma_i\cap\pi(n)\neq\varnothing\}$ и $\sigma(G)=\sigma(|G|)$ [1].

Под σ-*свойством* группы мы подразумеваем любое ее свойство, которое зависит от σ и которое не подразумевает никаких ограничений на σ [2], [3].

Сначала мы напомним некоторые концепции и примеры, которые играют основополагающую роль в теории σ-свойств группы.

Группа G называется: (i) σ-*полной*, если G имеет холлову σ_i-группу для всех $i\in I$; σ-примарной, если G является σ_i-группой для некоторого $i\in I$; σ-*нильпотентной*, если G является прямым произведением σ-примарных групп; σ-*разрешимой*, если каждый главный фактор G является σ-примарным.

(ii) Подгруппа A из G называется: σ-*субнормальной* в G, если в G существует цепь подгрупп

$$A=A_0\leq A_1\leq\cdots\leq A_n=G$$

такая, что либо $A_{i-1}\trianglelefteq A_i$, либо $A_i/(A_{i-1})_{A_i}$ является σ-примарной для всех $i=1,\ldots,n$; σ-*перестановочной* в G, если G σ-полна и A перестановочна со всеми холловыми σ_i-подгруппами G для всех $i\in I$.

Пример **0.1.** В математической практике, мы часто имеем дело с одним из следующих специальных разбиений $\mathbb{P}$:

(i) $\sigma = \sigma^1 := \{\{2\},\{3\},\{5\}\ldots\}$;

(ii) $\sigma = \sigma^\pi := \{\pi, \pi'\}$;

(iii) $\sigma = \sigma^{1\pi} := \{\{p_1\},\ldots,\{p_n\},\pi'\}$, где $\pi = \{p_1,\ldots,p_n\}$.

(i) В случае, когда $\sigma = \sigma^1$, G является σ-примарной (соответственно, σ-разрешимой, σ-нильпотентной) тогда и только тогда, когда G является p-группой для некоторого простого p (соответственно, G разрешима, нильпотентна). В этом случае подгруппа A из G является: σ-субнормальной в G тогда и только тогда, когда A субнормальна в G; σ-перестановочной в G тогда и только тогда, когда A перестановочна со всеми силовскими подгруппами из G.

(ii) В случае, когда $\sigma = \sigma^\pi$, G является σ-примарной (соответственно, σ-разрешимой, σ-нильпотентной) тогда и только тогда, когда G является либо π-группой, либо π'-группой (соответственно, G является π-отделимой, π-разложимой, т. е. $G = O_\pi(G)\times O_{\pi'}(G)$); подгруппа A из G является σ^π-субнормальной в G тогда и только тогда, когда G имеет цепь подгрупп

$$A = A_0 \le A_1 \le \cdots \le A_n = G,$$

где $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$ или $A_i/(A_{i-1})_{A_i}$ является либо π-группой, либо π'-группой для всех $i = 1,\ldots,n.$ В этом случае мы говорим, следуя [4], [5], что A является π,π'*-субнормальной* в G.

Подгруппа A из G является σ^π-перестановочной в G тогда и только тогда, когда G имеет как холлову π-подгруппу, так и холлову π'-подгруппу и A перестановочна со всеми такими холловыми подгруппами из G. В этом случае мы говорим, следуя [4], [5], что A является π,π'*-перестановочной* в G.

(iii) В случае, когда $\sigma = \sigma^{1\pi}$, G является σ-примарной (соответственно, σ-разрешимой, σ-нильпотентной) тогда и только тогда, когда G является либо π'-группой, либо p-группой для некоторого $p \in \pi$ (соответственно, G является π-разрешимой, π*-специальной* [6], [7], т. е.

$$G = O_{p_1}(G)\times\cdots\times O_{p_n}(G)\times O_{\pi'}(G));$$

подгруппа A из G является $\sigma^{1\pi}$-субнормальной в G тогда и только тогда, когда G имеет цепь подгрупп

$$A = A_0 \le A_1 \le \cdots \le A_n = G,$$

где $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$ или $A_i/(A_{i-1})_{A_i}$ является либо p-группой для некоторого $p \in \pi$, либо π'-группой для всех $i = 1,\ldots,n.$ В этом случае мы говорим, что A является 1π*-субнормальной* [4], [5] в G.

Подгруппа A из G является $\sigma^{1\pi}$-перестановочной в G тогда и только тогда, когда G имеет холлову π'-подгруппу и A перестановочна со всеми холловскими π'-подгруппами и со всеми силовскими p-подгруппами из G для всех $p \in \pi$. В этом случае мы говорим, что A является 1π*-перестановочной* [4], [5] в G.

Фактически основы теории σ-свойств группы были заложены в работах [2], [3] [6], где методами теории были найдены σ-обобщения теоремы Виландта о решетке субнормальных подгрупп [8] и результатов Дескинза – Кегеля [9], [10] о силовских перестановочных подгруппах конечных групп.

Напомним, что подгруппа A конечной группы G называется *перестановочной* с подгруппой B, если $AB = BA$. Если A перестановочная во всех силовских подгруппах G, то A называется *силовской перестановочной* или S-перестановочной в G.

Напомним, что верна следующая теорема.

***Теорема* 0.2** (Виландт, [8]). *Множество всех субнормальных подгрупп группы G образует подрешетку в* $\mathcal{L}(G)$.

Основные свойства силовских перестановочных подгрупп были доказаны в работах [9], [10].

***Теорема* 0.3.** *Если подгруппа A силовски перестановочна в группе G, то A субнормальна в G* (Кегель [9]) *и ее секция* A/A_G *нильпотентна* (Дескинз [10]).

***Теорема* 0.4** (Кегель [9]). *Множество всех силовских перестановочных подгрупп группы G образует подрешетку в* $\mathcal{L}(G)$.

Но фактически, эти три классических результата являются специальными случаями следующих теорем.

***Теорема* 0.5** (А.Н. Скиба [3]). *Если подгруппа A σ-полной группы G является σ-перестановочной в G, то A σ-субнормальна в G и ее секция* A/A_G *σ-нильпотентна.*

***Теорема* 0.6** (Скиба [3]). (i) *Множество всех σ-субнормальных подгрупп группы G образует подрешетку в* $\mathcal{L}(G)$.

(ii) *Множество всех σ-перестановочных подгрупп σ-полной группы G образует подрешетку в* $\mathcal{L}(G)$.

Теоремы 0.2, 0.3 и 0.4 являются частными случаями теорем 0.5 и 0.6, где $\sigma = \sigma^1$ (см. пример 0.1 (i)). Все остальные частные случаи теорем 0.5 и 0.6 являются новыми. В частности, ввиду примера 0.1 (ii) (iii) мы имеем следующие результаты.

***Теорема* 0.7.** *Предположим, что группа G имеет холлову* π*-подгруппу и холлову* π'*-подгруппу.*

(i) *Если подгруппа A группы G перестановочна со всеми холловыми* π*-подгруппами и всеми холловыми* π'*-подгруппами G, то A* π,π'*-субнормальна в G и ее секция* A/A_G π*-разложима.*

(ii) *Множество всех подгрупп из G, перестановочных со всеми ее холловыми* π*-подгруппами и* *всеми холловыми π'-подгруппами, образует подрешетку в $\mathcal{L}(G)$.*

***Теорема* 0.8.** *Предположим, что группа G имеет холлову π'-подгруппу.*

(i) *Если подгруппа A группы G перестановочна со всеми холловыми π'-подгруппами и со всеми силовскими p-подгруппами G для всех $p \in \pi$, то A 1π-субнормальна в G и ее секция A / A_G π-специальна.*

(ii) *Множество всех подгрупп группы G, перестановочных со всеми холловыми π'-подгруппами и всеми силовскими p-подгруппами G для всех $p \in \pi$, образует подрешетку в $\mathcal{L}(G)$.*

***Теорема* 0.9.** *Множество всех π, π'-субнормальных подгрупп и множество всех 1π-субнормальных подгрупп группы G являются подрешетками в $\mathcal{L}(G)$.*

В данной работе мы обсуждаем некоторые новые результаты теории σ-свойств группы.

1 *PσT*-группы

Теоремы 0.5 и 0.6 нашли приложения в работах многих авторов. Отметим, в частности, что работа [3], где были доказаны эти два результата, имеет уже более 300 цитирований в публикациях Х. Аль-Шаро, Д.С. Бейдлемана, А. Баллестера-Болинчес, Х. Биня, А.Ф. Васильева, З. Ванга, Н.Н. Воробьева, Н.Т. Воробьева, В. Го, С. Жанга, М.С. Педрасы-Агилеры, М. Ферраро, М. Тромбетти, Перес-Калабуинг, С. Као, А-Мин Лю, Д. Сонга, А.Н. Скибы, С.Ф. Каморникова, В.Н. Тютянова, Д.А. Синицы, И.Н. Сафоновой, В.Г. Сафонова, М.М. Сарокиной, В.И. Мурашко, В.А. Грицковой, В.С. Закревской, В.Н. Рыжик, Дж. Хуана, А.А. Хелиэля, М.М. Шомрани и многих других авторов.

И первые глубокие приложения теоремы 0.5 и 0.6 нашли в работах [3], [6] при решении проблемы описания σ-разрешимых *PσT*-групп.

***Определение* 1.1.** Мы говорим, следуя [2], [3], что σ-полная группа *G* является *PσT-группой*, если σ-перестановочность является транзитивным отношением в *G*, т. е., если *K* является σ-перестановочной подгруппой группы *H* и *H* является σ-перестановочной подгруппой группы *G*, то *K* является σ-перестановочной подгруппой группы *G*.

В случае, когда $\sigma = \sigma^1$, *PσT*-группа также называется *PST-группой* [11].

Описание *PST*-групп было впервые получено Агравалом [12] для разрешимого случая, и Робинсоном в [13] – для общего случая. В дальнейших публикациях (см. главу 2 книги [11]) авторы обнаружили и описали многие другие интересные характеризации *PST*-групп.

Ввиду результатов работ [12], [13] и многих других известных результатов о структуре *PST*-групп [11, гл. 2], вполне естественной и интересной является следующая проблема.

***Проблема* 1.2** [2], [3]. *Какова структура σ-полной PσT-группы?*

Эта задача оказалась очень сложной, и даже в σ-разрешимом случае ее решение потребовало разработки многих аспектов теории σ-свойств группы. Теория σ-разрешимых *PσT*-групп была в основном разработана в работах [3], [4], [16]–[20] и следующая теорема является ключевым результатом в этом направлении.

***Теорема* 1.3** (см. теорему A в [6]). *Если G является σ-разрешимой PσT-группой и $D = G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ – ее σ-нильпотентный корадикал G, то выполняются следующие условия:*

(i) $G = D \rtimes M$, *где D является абелевой холловской подгруппой G нечетного порядка, M является σ-нильпотентной и каждый элемент G индуцирует степенной автоморфизм в D;*

(ii) $O_{\sigma_i}(D)$ *имеет нормальное дополнение в холловской σ_i-подгруппе G для всех i.*

Обратно, если условия (i) *и* (ii) *выполняются для некоторых подгрупп D и M из G, то G является σ-разрешимой PσT-группой.*

Фактически, теорема 1.3 является главным итогом работ [3], [6].

В статье [4] эта проблема 1.2 решена при условии, что холловские σ_i-подгруппы *G* сверхразрешимы для всех $i \in I$.

Мы используем $R(D)$ для обозначения наибольшей нормальной разрешимой подгруппы группы *D*.

Мы говорим, что:

(A) $(D, \Phi(D); U_1, \ldots, U_k)$ является *комплексом Робинсона* (*комплексом Робинсона* в случае, когда $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \ldots\}$) группы *G*, если $D \neq 1$ является нормальной подгруппой группы *G* такой, что:

(i) $D / \Phi(D) = U_1 / \Phi(D) \times \cdots \times U_k / \Phi(D)$, где $U_i / \Phi(D)$ является простым не-σ-примарным главным фактором группы *G* для всех *i*, $\Phi(D) = Z(D)$, и

(ii) каждый главный фактор *G* ниже $\Phi(D)$ является циклическим.

(B) $(D, \Phi(D); U_1, \ldots, U_k)$ является *обобщенным σ-комплексом Робинсона G*, если $D \neq 1$ является нормальной подгруппой в *G* такой, что $D / \Phi(D) = U_1 / \Phi(D) \times \cdots \times U_k / \Phi(D)$, где $U_i / \Phi(D)$ является простым не-σ-примарным главным фактором *G* для всех *i* и $\Phi(D) = Z(D)$.

(C) $(D, \Phi(D); U_1, \ldots, U_k)$ является *слабым σ-комплексом Робинсона* группы *G*, если $D \neq 1$ является нормальной подгруппой группы *G*, такой что $D / \Phi(D) = U_1 / \Phi(D) \times \cdots \times U_k / \Phi(D)$, где

$U_i / \Phi(D)$ является простым не-σ-примарным главным фактором группы G для всех i и $\Phi(D) = R(D)$.

***Пример* 1.4.** (i) Пусть

$$G = SL(2,7) \times A_7 \times A_5 \times B,$$

где $B = C_{43} \rtimes C_7$ является неабелевой группой порядка 301 и пусть

$$\sigma = \{\{2,3,5\},\{7,43\},\{2,3,5,7,43\}'\}.$$

Тогда

$$(SL(2,7) \times A_7, Z(SL(2,7)); SL(2,7), A_7 Z(SL(2,7)))$$

является σ-комплексом Робинсона G и

$$(SL(2,7) \times A_7 \times A_5, Z(SL(2,7));$$
$$SL(2,7), A_7 Z(SL(2,7)), A_5 Z(SL(2,7)))$$

является комплексом Робинсона G.

(ii) Если $(D, Z(D); U_1, \ldots, U_k)$ является комплексом Робинсона σ^{π} для G (см. пример 0.1 (ii)), то $U_i / Z(D)$ не является ни π-группой, ни π'-группой, и в этом случае мы говорим, что $(D, Z(D); U_1, \ldots, U_k)$ является π, π'-комплексом Робинсона для G.

(iii) Если $(D, Z(D); U_1, \ldots, U_k)$ является комплексом Робинсона $\sigma^{1\pi}$ для G (см. пример 0.1(iii)), то $U_i / Z(D)$ не является ни π'-группой, ни p-группой для всех $p \in \pi$, и в этом случае мы говорим, что $(D, Z(D); U_1, \ldots, U_k)$ является комплексом Робинсона 1π для G.

(iv) Пусть L является 5-Фраттини модулем для A_5. Пусть K является нерасщепляющим расширением L с помощью A_5. Тогда для некоторой нормальной подгруппы N из K мы имеем $L / N \le \Phi(K / N)$ и $C_K(L / N) = L$, поскольку порядок мультипликатора Шура $M(K / A) = M(A_5)$ группы A_5 не делится на 5 (см. раздел 4.15 (A) в [14, гл. 4]). Следовательно, $A \not\le Z(K)$.

Теперь $G = K \times A_7 \times B$, где $B = C_{43} \rtimes C_7$ является неабелевой группой порядка 301 и пусть $\sigma = \{\{2,3\},\{5,7,43\},\{2,3,5,7,43\}'\}$. Тогда

$$(K \times A_7, L; K, LA_7)$$

является слабым σ-комплексом Робинсона G и этот комплекс не является обобщенным σ-комплексом Робинсона G.

Пусть $\pi \subseteq \mathbb{P}$. Если $\pi = \varnothing$, то мы положим $O_{\pi}(G) = O_{\varnothing}(G) = 1$. Мы говорим, что G *удовлетворяет* $\mathbf{N}_{\pi}$, если всякий раз, когда N является разрешимой нормальной подгруппой G, π'-элементы G индуцируют степенные автоморфизмы в $O_{\pi}(G / N)$. Мы также говорим, следуя [11, определение 2.1.18], что G *удовлетворяет* $\mathbf{N}_p$, если всякий раз, когда N является разрешимой нормальной подгруппой G, p'-элементы G индуцируют степенные автоморфизмы в $O_p(G / N)$.

В работе [15] доказана следующая теорема, дающая решение проблемы 1.2 в общем случае.

***Теорема* 1.5.** *Пусть G является σ-полной группой. Если G является PσT-группой, то G имеет нормальную подгруппу D такую, что:*

(i) *G / D является σ-разрешимой PσT-группой,*

(ii) *если $D \ne 1$, G имеет обобщенный σ-комплекс Робинсона $(D, \Phi(D); U_1, \ldots, U_k)$, и*

(iii) *для любого множества*

$$\{j_1, \ldots, j_r\} \subseteq \{1, \ldots, k\},$$

где $1 \le r < k$, G и $G / U'_{j_1} \cdots U'_{j_r}$ удовлетворяют $\mathbf{N}_{\sigma_i}$ для всех $\sigma_i \in \sigma(\Phi(D))$.

Более того, если G имеет слабый σ-комплекс Робинсона $(D, \Phi(D); U_1, \ldots, U_k)$ и условия (i) *и* (iii) *выполняются для G, то G является PσT-группой.*

Мы говорим, что группа G является *обобщенно сверхразрешимой*, если каждый абелев главный фактор G является циклическим.

В качестве применения теоремы 1.5 может быть доказана следующая теорема [15].

***Теорема* 1.6.** *Предположим, что G является σ-полной группой и все холловы σ_i-подгруппы из G обобщенно сверхразрешимы для всех $\sigma_i \in \sigma(G)$. Тогда G является PσT-группой, если и только если G имеет нормальную подгруппу D такую, что:*

(i) *G / D является σ-разрешимой PσT-группой,*

(ii) *если $D \ne 1$, G имеет σ-комплекс Робинсона $(D, \Phi(D); U_1, \ldots, U_k)$, и*

(iii) *для любого множества*

$$\{j_1, \ldots, j_r\} \subseteq \{1, \ldots, k\},$$

где $1 \le r < k$, G и $G / U'_{j_1} \cdots U'_{j_r}$ удовлетворяют $\mathbf{N}_{\sigma_i}$ для всех $\sigma_i \in \sigma(\Phi(D))$.

Следующее утверждение доказано в работе [4].

***Следствие* 1.7.** *Предположим, что G является σ-полной группой и все холловы σ_i-подгруппы из G сверхразрешимы для всех $\sigma_i \in \sigma(G)$. Тогда G является PσT-группой, если и только если G имеет нормальную подгруппу D такую, что:*

(i) *G / D является σ-разрешимой PσT-группой,*

(ii) *если $D \ne 1$, G имеет σ-комплекс Робинсона $(D, \Phi(D); U_1, \ldots, U_k)$, и*

(iii) *для любого множества*

$$\{j_1, \ldots, j_r\} \subseteq \{1, \ldots, k\},$$

где $1 \le r < k$, G и $G / U'_{j_1} \cdots U'_{j_r}$ удовлетворяют $\mathbf{N}_{\sigma_i}$ для всех $\sigma_i \in \sigma(\Phi(D))$.

Ввиду примера 0.1 (iii) из теоремы 1.3 получаем следующее

***Следствие* 1.8.** *Предположим, что G имеет холлову π'-подгруппу. Тогда условие 1π-перестановочности является транзитивным отношением в G тогда и только тогда, когда G имеет нормальную подгруппу D такую, что*:

(i) *G/D является π-разрешимой и условие 1π-перестановочности является транзитивным отношением в G/D*,

(ii) *если $D \neq 1$, G имеет обобщенный 1π-комплекс Робинсона $(D, \Phi(D); U_1, \ldots, U_k)$, и*

(iii) *для любого множества*

$$\{j_1, \ldots, j_r\} \subseteq \{1, \ldots, k\},$$

где $1 \le r < k$, G и $G/U'_{j_1} \cdots U'_{j_r}$ удовлетворяют $\mathbf{N}_p$ для всех $p \in \pi(\Phi(D))$ и, также, $\mathbf{N}_{\pi'}$ для случая $O_{\pi'}(\Phi(D)) \neq 1$.

Ввиду примера 0.1 (i) из следствия 1.8 получаем следующее утверждение, доказанное Робинсоном в работе [13].

***Следствие* 1.9.** *Группа G является PST-группой в том и только в том случае, когда G имеет совершенную нормальную подгруппу D такую, что*:

(i) *G/D является разрешимой PST-группой*,

(ii) *если $D \neq 1$, G имеет комплекс Робинсона $(D, \Phi(D); U_1, \ldots, U_k)$, и*

(iii) *для любого множества*

$$\{j_1, \ldots, j_r\} \subseteq \{1, \ldots, k\},$$

где $1 \le r < k$, G и $G/U'_{j_1} \cdots U'_{j_r}$ удовлетворяют $\mathbf{N}_p$ для всех $p \in \pi(\Phi(D))$.

Теорема 1.3 также имеет много других следствий. В частности, ввиду примера 0.1 (ii) из теоремы 1.3 получаем следующее

***Следствие* 1.10.** *Предположим, что G имеет холлову π-подгруппу и холлову π'-подгруппу. Тогда условие π, π'-перестановочности является транзитивным отношением в G в том и только в том случае, когда G имеет нормальную подгруппу D такую, что*:

(i) *G/D является π-отделимой и условие π, π'-перестановочности является транзитивным отношением в G/D*,

(ii) *если $D \neq 1$, G имеет обобщенный π, π'-комплекс Робинсона $(D, \Phi(D); U_1, \ldots, U_k)$, и*

(iii) *для любого множества*

$$\{j_1, \ldots, j_r\} \subseteq \{1, \ldots, k\},$$

где $1 \le r < k$, G и $G/U'_{j_1} \cdots U'_{j_r}$ удовлетворяют $\mathbf{N}_\pi$ если $O_\pi(\Phi(D)) \neq 1$ и $\mathbf{N}_{\pi'}$ если $O_{\pi'}(\Phi(D)) \neq 1$.

В работе [15] найдена также следующая новая характеризация σ-разрешимых *PσT*-групп.

***Теорема* 1.11.** *Пусть G – σ-разрешимая группа и $D = G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ – σ-нильпотентный корадикал G. Тогда G является PσT-группой в том и только в том случае, когда D изолирует A^G/A_G, то есть, если $D \cap A^G = D \cap A_G$ для каждой σ-субнормальной подгруппы A из G.*

Этот результат является новым для каждого специального разбиения множества $\mathbb{P}$.

В частности, взяв $\sigma = \sigma^1$, мы видим, что имеет место следующий новый результат о *PST*-группах.

***Теорема* 1.12.** *Пусть G – разрешимая группа и $D = G^{\mathfrak{N}}$ – нильпотентный корадикал G. Тогда G является PσT-группой в том и только в том случае, когда D изолирует A^G/A_G, то есть, если $D \cap A^G = D \cap A_G$ для каждой субнормальной подгруппы A из G.*

Приведем еще два интересных следствия теоремы 1.11.

***Теорема* 1.13.** *Пусть G – π-отделимая группа и D – π-разложимый корадикал G. Тогда π, π'-перестановочность является транзитивным отношением в G в том и только в том случае, когда D изолирует A^G/A_G для каждой π, π'-субнормальной подгруппы A из G.*

***Теорема* 1.14.** *Пусть G – π-разрешимая группа, а D – π-специальный корадикал G. Тогда 1π-перестановочность является транзитивным отношением в G в том и только в том случае, когда D изолирует A^G/A_G для каждой 1π-субнормальной подгруппы A из G.*

2 Обобщенно нормальные подгруппы

Анализ теорем 1.11 и 1.12 привел к открытию, восходящих к [18], новых решеточных методов исследования обобщенных *T*-групп и других классов групп, полезных для приложений.

Начнем со следующих определений, мотивацией для которых являются теоремы 1.11 и 1.12 и которые были впервые введены и применялись в работе [15].

Напомним, что подгруппа *A* из *G* *покрывает* (соответственно *изолирует*) главный (композиционный) фактор H/K из *G*, если $AH = AK$ (если, соответственно, $A \cap H = A \cap K$). Эти концепции восходят к классической работе Ф. Холла [21], где было доказано, что каждый системный нормализатор разрешимой группы *G* покрывает все центральные главные факторы и изолирует все эксцентральные главные факторы *G*.

Подгруппа, которая либо покрывает, либо изолирует каждый главный фактор группы *G*, называется *CAP-подгруппой* группы *G*. Нетрудно показать, что каждая подгруппа сверхразрешимой группы и каждая максимальная подгруппа разрешимой группы являются *CAP*-подгруппами.

В отчетный период мы применяли новый, восходящий к [18], подход к использованию идеи изолирования для доказательства новых характеризаций различных классов групп.

Пусть $\mathcal{L}(G)$ – это решетка всех подгрупп G; $\mathcal{L}_{sn}(G)$ – это решетка всех субнормальных подгрупп G и $G \in \mathcal{L}$ – это подрешетка в $\mathcal{L}_{sn}(G)$, то есть $A \cap B, \langle A, B \rangle \in \mathcal{L}$ для всех $A, B \in \mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_{sn}(G)$.

Пусть A – подгруппа G. Тогда: $A^{\mathcal{L}}$ – это *$\mathcal{L}$-замыкание A в G*, то есть пересечение всех подгрупп в $\mathcal{L}$, содержащих A, а $A_{\mathcal{L}}$ – это *$\mathcal{L}$-ядро A в G*, то есть подгруппа A, порожденная всеми подгруппами A, принадлежащими $\mathcal{L}$.

***Пример* 2.1.** (i) A^G – нормальное замыкание A в G, а A_G – ядро A в G.

(ii) A^{snG} – субнормальное замыкание A в G, а A_{snG} – субнормальное ядро A в G.

(iii) Подгруппа A из G называется *силовски перестановочной* или *S-перестановочной* [11] в G, если A перестановочна с каждой силовской подгруппой p из G, то есть $AP = PA$. S-перестановочные подгруппы из G образуют подрешетку решетки всех субнормальных подгрупп из G (Кегель) и этот важный результат позволяет связать с каждой подгруппой A из G две S-перестановочные подгруппы из G: *S-ядро A_{sG} из A* в G [22], то есть подгруппа из A, порожденная всеми S-перестановочными подгруппами из G, содержащимися в A, и *S-перестановочное замыкание A^{sG} из A* в G [23], то есть пересечение всех S-перестановочных подгрупп из G, содержащих A.

***Определение* 2.2.** Пусть A и N – подгруппы G, и предположим, что $G \in \mathcal{L}$ – подрешетка $\mathcal{L}_{sn}(G)$. Тогда мы говорим, что A – *N-$\mathcal{L}$-подгруппа G*, если либо $A \in \mathcal{L}$, либо $A_{\mathcal{L}} < A < A^{\mathcal{L}}$ и N изолирует каждый композиционный фактор G между $A_{\mathcal{L}}$ и $A^{\mathcal{L}}$.

В частности, мы говорим, что:

(i) A является *N-нормальной* в G, если либо A нормально в G, либо $A_G < A < A^G$, и N изолирует каждый композиционный фактор G между A_G и A^G;

(ii) A является *N-субнормальной* в G, если либо A субнормально в G, либо $A_{snG} < A < A^{snG}$, и N изолирует каждый композиционный фактор G между A_{snG} и A^{snG};

(iii) A является *N-S-перестановочной* в G, если либо A является S-перестановочной в G, либо $A_{sG} < A < A^{sG}$ и N изолирует каждый композиционный фактор G между A_{sG} и A^{sG}.

В работе [15] эти концепции нашли следующие применения.

***Теорема* 2.3.** *Пусть $\mathfrak{M}$ – класс всех разрешимых групп S с нильпотентной длиной $l(S) \le r$). Тогда G – разрешимая группа (соответственно, разрешимая группа с $l(G) \le r+1$) в том и только в том случае, когда выполняются следующие два условия*:

(i) *G имеет такую нормальную подгруппу N, для которой фактор группа G/N разрешима (соответственно, G/N разрешима и $l(G/N) \le r+1$), и*

(ii) *каждая $\mathfrak{M}$-критическая подгруппа группы G является N-субнормальной в G.*

***Теорема* 2.4.** (i) *Группа G разрешима тогда и только тогда, когда в G имеется нормальная подгруппа N такая, что G/N разрешима и каждая подгруппа Шмидта группы G N-субнормальна в G.*

(ii) *Группа G метанильпотентна тогда и только тогда, когда в G имеется нормальная подгруппа N такая, что G/N метанильпотентна и каждая подгруппа Шмидта группы G N-субнормальна в G.*

В работе [25] В.Н. Семенчук доказал следующий специальный случай этой теоремы.

***Следствие* 2.5.** *Если каждая подгруппа Шмидта группы G субнормальна в G, то G метанильпотентна.*

***Следствие* 2.6.** *Пусть $\mathfrak{M}$ – класс всех разрешимых групп S с нильпотентной длиной $l(S) \le r$). Тогда G – разрешимая группа (соответственно, разрешимая группа с $l(G) \le r+1$) в том и только в том случае, когда выполняются следующие два условия:*

(i) *G имеет такую нормальную подгруппу N, для которой фактор группа G/N разрешима (соответственно, G/N разрешима и $l(G/N) \le r+1$), и*

(ii) *каждая $\mathfrak{M}$-критическая подгруппа группы G является N-субнормальной в G.*

***Теорема* 2.7.** *Производная подгруппа G' группы G нильпотентна тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия*:

(i) *G имеет такую нормальную подгруппу N, для которой производная подгруппа $(G/N)'$ фактор группы G/N нильпотентна, и*

(ii) *каждая подгруппа Шмидта группы G является N-субнормальной в G.*

***Следствие* 2.8.** *Производная подгруппа G' группы G является нильпотентной тогда и только тогда, когда G имеет нормальную подгруппу N такую, что производная подгруппа $(G/N)'$ группы G/N нильпотентна и каждая подгруппа Шмидта группы G N-субнормальна в G.*

В работе [26] В.С Монахов и В.Н. Княгина доказали следующий случай этой теоремы.

***Следствие* 2.9.** *Если каждая подгруппа Шмидта группы G субнормальна в G, то производная подгруппа G' группы G нильпотентна.*

***Теорема* 2.10.** *Группа G является p-разрешимой тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия*:

(i) *G имеет нормальную подгруппу N с p-разрешимым фактором G/N, и*

(ii) *в каждой максимальной цепочке $M_2 < M_1 < M_0 = G$ группы G длины 2 по крайней мере одна из подгрупп M_2 или M_1 является N-субнормальной в G, тогда G p-разрешима.*}

В работе [27] Спенсер доказал следующий результат.

***Следствие* 2.11.** *Если в каждом максимальной цепи $M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$ группы G длины 3 хотя бы одна из подгрупп M_3, M_2 или M_1 субнормальна в G, то G разрешима.*

3 $Q\sigma T$-группы

Напомним, что подгруппа M группы G называется *модулярной* в G, если M – модулярный элемент в смысле Куроша решетки $\mathcal{L}(G)$, т. е.

(i) $\langle X, M \cap Z \rangle = \langle X, M \rangle \cap Z$ для всех $X \leq G, Z \leq G$ таких, что $X \leq Z$, и

(ii) $\langle M, Y \cap Z \rangle = \langle M, Y \rangle \cap Z$ для всех $Y \leq G, Z \leq G$ таких, что $M \leq Z$.

***Определение* 3.1.** Мы говорим, что G является $Q\sigma T$-группой, если каждая σ-субнормальная подгруппа в G является модулярной в G.

В работе [15] доказана следующая теорема, обобщающая основной результат работы Робинсона [13].

***Теорема* 3.2.** *Предположим, что G – σ-полная группа. Тогда G является $Q\sigma T$-группой, если и только если G имеет нормальную подгруппу D такую, что:*

(i) *G/D – σ-разрешимая $Q\sigma T$-группа,*

(ii) *если $D \neq 1$, G имеет σ-комплекс Робинсона $(D, Z(D); U_1, \ldots, U_k)$ и*

(iii) *для любого множества*

$$\{i_1, \ldots, i_r\} \subseteq \{1, \ldots, k\},$$

где $1 \leq r < k$, G и $G/U'_{j_1} \cdots U'_{j_r}$ удовлетворяют $\mathbf{N}_{\sigma_i}$ для всех $\sigma_i \in \sigma(Z(D))$ и $\mathbf{P}_{\sigma_i}$ для всех $\sigma_i \in \sigma(D)$.

Прежде отметим, что данная теорема выделяет новый класс σ-сверхразрешимых групп и, кроме того, она дает условия, при которых группа факторизуется двумя холловскими подгруппами с единичным пересечением.

Но эта теорема имеет и ряд других приложений. Отметим некоторые из них.

В случае $\sigma = \sigma^{1\pi}$ из этой теоремы получаем следующее

***Следствие* 3.3.** *Предположим, что G имеет холлову π'-подгруппу. Тогда каждая π-субнормальная подгруппа группы G модулярна в G, если и только если G имеет нормальную подгруппу D такую, что:*

(i) *G/D – π-разрешимая группа, в которой каждая π-субнормальная подгруппа модулярна,*

(ii) *если $D \neq 1$, G имеет π-комплекс Робинсона $(D, Z(D); U_1, \ldots, U_k)$ и*

(iii) *для любого множества*

$$\{i_1, \ldots, i_r\} \subseteq \{1, \ldots, k\},$$

где $1 \leq r < k$, G и $G/U'_{j_1} \cdots U'_{j_r}$ удовлетворяют $\mathbf{N}_p$ для всех простых чисел p, делящих $|Z(D)|$, и $\mathbf{N}_{\pi'}$, если $O_{\pi'}(Z(D)) \neq 1$, а также G и $G/U'_{j_1} \cdots U'_{j_r}$ удовлетворяют $\mathbf{P}_p$ для всех простых чисел p, делящих $|D|$ и $\mathbf{P}_{\pi'}$ если $O_{\pi'}(D) \neq 1$.

В случае $\pi = \mathbb{P}$ из следствия 3.3 получаем следующее

***Следствие* 3.4** (Робинсон [13]). *G является PT-группой, если и только если G имеет нормальную совершенную подгруппу D такую, что:*

(i) *G/D – разрешимая PT-группа и*

(ii) *если $D \neq 1$, G имеет комплекс Робинсона $(D, Z(D); U_1, \ldots, U_k)$ и*

(iii) *для любого множества*

$$\{i_1, \ldots, i_r\} \subseteq \{1, \ldots, k\},$$

где $1 \leq r < k$, G и $G/U'_{j_1} \cdots U'_{j_r}$ удовлетворяют $\mathbf{N}_p$ для всех $p \in \pi(Z(D))$ и $\mathbf{P}_p$ для всех $p \in \pi(D)$.

Теорема 3.2 имеет также много других следствий. В частности, из теоремы 3.2 получаем следующее

***Следствие* 3.5.** *Предположим, что G имеет холл π-подгруппа и холлова π'-подгруппа. Тогда каждая π, π'-субнормальная подгруппа группы G модулярна в G, если и только если G имеет нормальную подгруппу D такую, что:*

(i) *G/D – π-отделимая группа, в которой любая π, π'-субнормальная подгруппа модулярна,*

(ii) *если $D \neq 1$, G имеет π, π'-комплекс Робинсона $(D, Z(D); U_1, \ldots, U_k)$ и*

(iii) *для любого множества*

$$\{i_1, \ldots, i_r\} \subseteq \{1, \ldots, k\},$$

где $1 \leq r < k$, G и $G/U'_{j_1} \cdots U'_{j_r}$ удовлетворяют $\mathbf{N}_\pi$, если $O_\pi(Z(D)) \neq 1$ и $\mathbf{N}_{\pi'}$, если $O_{\pi'}(D) \neq 1$, а также G и $G/U'_{j_1} \cdots U'_{j_r}$ удовлетворяют $\mathbf{P}_\pi$, если $O_\pi(D) \neq 1$ и $\mathbf{P}_{\pi'}$, если $O_{\pi'}(D) \neq 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Skiba, A.N.* On some results in the theory of finite partially soluble groups / A.N. Skiba // Commun. Math. Stat. – 2016. – Vol. 4, № 3. – P. 281–309.

2. *Skiba, A.N.* On σ-properties of finite groups I / A.N. Skiba // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2014. – № 4 (21). – P. 89–96.

3. *Skiba, A.N.* On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.

4. *A Robinson description of finite PσT-groups* / X.-F. Zhang, W. Guo, I.N. Safonova, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2023. – Vol. 631. – P. 218–235. – DOI: https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2023.04.023

5. *Characterizations of some classes of finite σ-soluble PσT-groups* / H. Li, A.-M. Liu, I.N. Safonova, A.N. Skiba // Comm. Algebra. – 2024. – Vol. 52, iss. 1. – P. 128–139. – DOI: https://doi.org/10.1080/00927872.2023.2235006.

6. *Skiba*, *A.N.* Some characterizations of finite σ-soluble *PσT*-groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2018. – Vol. 495. – P. 114–129.

7. *Guo*, *W.* On σ-supersoluble groups and one generalization of *CLT*-groups / W. Guo, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2018. – Vol. 512. – P. 92–108.

8. *Wielandt*, *H.* Eine Verallgemenerung der invarianten Untergruppen / H. Wielandt // Math. Z. – 1939. – Vol. 45. – P. 200–244.

9. *Kegel*, *O.H.* Sylow-Gruppen and Subnormalteilerendlicher / O.H. Kegel // Gruppen, Math. Z. – 1962. – Vol. 78. – P. 205–221.

10. *Deskins*, *W.E.* On quasinormal subgroups of finite groups / W.E. Deskins // Math. Z. – 1963. – Vol. 82. – P. 125–132.

11. *Ballester-Bolinches*, *A.* Products of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, M. Asaad. – Walter de Gruyter, Berlin – New York, 2010.

12. *Agrawal*, *R.K.* Finite groups whose subnormal subgroups permute with all Sylow subgroups / R.K. Agrawal // Proc. Amer. Math. Soc. – 1975. – Vol. 47. – P. 77–83.

13. *Robinson*, *D.J.S.* The structure of finite groups in which permutability is a transitive relation / D.J.S. Robinson // J. Austral. Math. Soc. – 2001. – Vol. 70. – P. 143–159.

14. *Gorenstein*, *D.* Finite simple groups. An introduction to their Classification / D. Gorenstein. – Plenum Press New York and London, 1982.

15. *Сафонов*, *В.Г.* Новые решеточные мнтоды исследования групп / В.Г. Сафонов, А.Н. Скиба // Препринт, 2024.

16. *Zhu*, *X.* Finite σ-soluble groups in which σ-permutability is a transitive relation / X. Zhu, C. Cao, W. Guo // Journal of Algebra and Its Applications. – 2019. – Vol. 18, iss. 4. – P. 1950064 (11 pages). – DOI: 10.1142/S0219498819500646.

17. *Adarchenko*, *N.M.* A new characterization of finite σ-soluble *PσT*-groups / N.M. Adarchenko // Algebra and Discrete Math. – 2020. – Vol. 29, № 1. – P. 33–41.

18. *Skiba*, *A.N.* On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2020. – Vol. 550. – P. 69–85.

19. *G-covering subgroup systems for some classes of σ-soluble groups* / A.-M. Liu, W. Guo, I.N. Safonova, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2021. – Vol. 585. – P. 280–293.

20. *Ballester-Bolinches*, *A.* On two classes of generalized *T*-groups / A. Ballester-Bolinches, M.C. Pedraza-Aguilera, V. Pérez-Calabuing // Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales. Serie A. Matematicas. – 2023. – Vol. 117. – P. 105. – DOI: https://doi.org/10.1007/s13398-023-01443-5.

21. *Hall*, *P.* On the system normalizers of a soluble Group / P. Hall // Proc. London Math. Soc. – 1937. – Vol. 43. – P. 307–328.

22. *Skiba*, *A.N.* On weakly *S*-permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2007. – Vol. 315, № 1. – P. 192–209.

23. *Guo*, *W.* Finite groups with given *S*-embedded and *N*-embedded subgroups / W. Guo, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2009. – Vol. 321. – P. 2843–2860.

24. *On σ-permutable subgroups of* σ*-soluble finite groups* / Zhigang Wang, A.-Ming Liu, V.G. Safonov, A.N. Skiba // Journal of Group Theory. – 2024. – DOI: https://doi.org/10.1515/jgth-2024-0012.

25. *Семенчук*, *В.Н.* Конечные группы с системой минимальных не-$\mathfrak{F}$-групп / В.Н. Семенчук. – В книге Структура подгрупп конечных групп. – Минск: Наука и техника, 1981. – С. 138–149.

26. *Монахов*, *В.С.* О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппы Шмидта / В.С. Монахов, В.Н. Княгина // Сибирский математический журнал. – 2004. – Т. 45, № 6. – С. 1316–1322.

27. *Spencer*, *A.E.* Maximal nonnormal chains in finite groups / A.E. Spencer // Pacific J. Math. – 1968. – Vol. 27, № 1. – P. 167–173.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (*проект* № Ф23РНФ-237) *и Министерства образования Республики Беларусь* (*гранты* № 20211328, № 20211778).

Поступила в редакцию 31.08.2024.

Информация об авторах

Сафонов Василий Григорьевич – д.ф.-м.н., профессор
Скиба Александр Николаевич – д.ф.-м.н., профессор