Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 1

УДК 517.947 *МАТЕМАТИКА*

С. В. УСПЕНСКИЙ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 21 IV 1970)

Настоящая работа посвящена изучению на всем эвклидовом пространстве E_k решений уравнения

$$P(D) = f. \tag{1}$$

На оператор $P(D)$ накладывается условие, что его характеристический полином $P(it)$ может быть представлен в виде

$$P(it) = \prod_{\nu=1}^{n} P_\nu(it_\nu) = \prod_{\nu=2}^{n} P_\nu(it_{s_1^\nu} \ldots 1_{s_{k_\nu}^\nu}),$$

где для каждого $\nu = 1, \ldots, n$ P_ν является полиномом с постоянными коэффициентами от k_ν переменных (K_ν может быть меньше размерности пространства E_k) и удовлетворяет следующим условиям:

а) $P_\nu(it_\nu) \neq 0$ в вещественных точках при $\quad |t_\nu| = \sum_{i=1}^{k\nu} |t_{s_i^\nu}| \neq 0;$

б) $P_\nu(it_\nu)$ является квазиоднородным, т. е. для любого $\lambda > 0$ выполняется условие

$$P_\nu(i\lambda^{\alpha_\nu} t_\nu) = P_\nu(it_{s_1^\nu} \lambda^{\alpha^\nu_{s_1^\nu}} \ldots it_{s_{k_\nu}^\nu} \lambda^{\alpha^\nu_{s_{k_\nu}^\nu}}) = \lambda P_\nu(it_\nu).$$

Вектор α_ν будем называть показателем однородности оператора $P_\nu(D)$. Очевидно, что в рассматриваемый класс операторов входят эллиптические, параболические, а в случае $k = 2$ и гиперболические однородные операторы.

Локально такие (и более общие операторы) хорошо изучены и в терминах классов $B_p{}^\mu$ Хёрмандера получены точные оценки ([1]). Свойства решения в целом исследованы значительно меньше. Наиболее глубокие результаты получены здесь для частично-гипоэллиптических уравнений в терминах классов Жеврея (подробная библиография этих работ в ([2])). Использованные при этом методы связаны с бесконечным порядком дифференцирования и с локальным характером оценок. В случае всего эвклидова пространства наибольшее число работ относится к изучению уравнения типа Гельмгольца, а также различных его обобщений с условиями на бесконечности типа Зоммерфельда (см. например ([3], [4])). К этим исследованиям близки работы ([5], [6]), в которых получены оценки в метрике L_2 (а также других классов) для операторов, характеристический полином которых не обращается в нуль в вещественных точках. Многочисленные работы посвящены также изучению уравнений вида (1) при различных краевых условиях; здесь получены оценки в основном в терминах $W_2{}^l$ Соболева. Отметим также работу ([7]), в которой даны оценки в $W_p{}^l$ для одного класса операторов на замыкании финитных функций и ([8]), в которой для всего пространства (полупространства) в терминах общих норм получены оценки эллиптических и параболических систем, подчиняющихся условиям

Шапиро — Лопатинского. Ниже мы предполагаем, что оператор $P(D)$ определен на множестве функций, которые имеют на бесконечности рост не более степенного и локально обладает всеми суммируемыми в L_p, $1 < p < \infty$, производными, которые входят в $P(D)$. Таким образом, область определения оператора $P(D)$ является подпространством функционального пространства S' (по терминологии Л. Шварца). За область значений оператора мы принимаем либо пространство типа L_p, либо пространство типа Гёльдера. Основная задача, которая здесь решается, это, во-первых, доказать существование решения уравнения (1), удовлетворяющего точным двухсторонним оценкам типа теорем вложения, как в нормах L_p, так и в нормах Гёльдера на всем эквивалентном пространстве E_k. Во-вторых, дать эффективный метод выделения из области определения оператора $P(D)$ тех функций, для которых эта оценка справедлива. Последнее удается сделать в терминах предельного среднего, требуя, по существу, стабилизации решений на бесконечности. Полученные здесь результаты обобщают работы автора [9, 10].

Введем некоторые определения.

Пусть $f \in L_p^{\mathrm{loc}}$, $1 < p < \infty$. Положим

$$M_{S^\nu}[f(x)] = \prod_{i=1}^{k_\nu} \frac{1}{S_i^\nu} \int_0^{S_1^\nu} \cdots \int_0^{S_{k_\nu}^\nu} f(x+u)\,du,$$

$$M_S[f(x)] = M_{S^1}[M_{S^2} \ldots [M_{S^n}[f(x)] \ldots], \quad h = (h_1, \ldots, h_n),$$

$$\alpha_\nu = (\alpha_{S_1^\nu}^\nu, \ldots, \alpha_{S_{k_\nu}^\nu}^\nu), \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad |h| = \sum_{\nu=1}^n |h_\nu|,$$

$$|\alpha| = \sum_{\nu=1}^n |\alpha_\nu|, \quad |k| = \sum_{\nu=1}^n |k_\nu|, \quad |S| = \sum_{\nu=1}^n |S^\nu| = \sum_{\nu=1}^n \sum_{i=1}^{k_\nu} |S_i^\nu|,$$

$$\int_h^{h^{-1}} v^{-|\alpha|}\,dv = \int_{h_1}^{h_1^{-1}} v_1^{-|\alpha_1|}\,dv_1 \ldots \int_{h_n}^{h_n^{-1}} v_n^{-|\alpha_n|}\,dv_n.$$

Тогда, если $f \in L_p^{\mathrm{loc}}$, $1 < p < \infty$, и для почти всех $x \in E_k$

$$\lim_{|S| \to \infty} M_S[f(x)] = 0,$$

то для почти всех x имеет место представление

$$f = \lim_{|h| \to 0} \frac{1}{(2\pi)^{|k|}} \int_h^{h^{-1}} v^{-|\alpha|}\,dv \int_{E_k} P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \hat{G}(t, x, v^\alpha) f(t)\,dE_k, \tag{2}$$

где оператор $P(D)$ удовлетворяет условиям (1). Полученное представление (2) по форме совпадает с известным представлением Соболева — Ильина; его можно также считать обобщением представления Радона [11], которое связано с полигармоническим оператором. Используя это представление, получаем точные оценки для решений уравнения (1). В зависимости от вида оператора эти оценки имеют место либо в нормах L_p, либо в нормах типа Гёльдера.

Приведем два результата такого рода. Определим класс $\mathscr{L}$. Будем считать, что $f \in \mathscr{L}$, если она сама и все ее производные до порядков, которые входят в $P(D)$, принадлежат L_p^{loc}, $1 < p < \infty$, и имеют на бесконечности рост не выше степенного. Будем говорить, что U — регулярное решение (1), если $U \in \mathscr{L}$ и почти всюду удовлетворяет (1). Обозначим $\bar{\nu}$ те индексы, для которых характеристический полином $P_\nu(it_\nu)$ имеет вещественный корень при $\sum_{i=1}^{k} |t_i| \neq 0$ (полином $P_\nu(it_\nu)$ зависит не от всех переменных $t_1 \dots t_k$). Для определенности будем считать, что $\bar\nu = n \dots n-m+1$, $1 \leqslant m \leqslant n$.

Обозначим через $\alpha_\nu = (\alpha^\nu_{s_1^\nu} \dots \alpha^\nu_{s_{k_\nu}^\nu})$ показатель однородности оператора $P_\nu(D)$. Тогда имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть $f \in L_{q_0}(E_k) \cap L_{r_0}(E_k)$, $\infty > q \geqslant r_0 \geqslant q_0 > 1$,*

$$\rho_\nu = (\rho^\nu_{s_1^\nu}, \dots, \rho^\nu_{s_{k_\nu}^\nu}), \quad \nu = 1, \dots, n.$$

Если существуют такие r_i, q_i, $i = 1, \dots, n-m-1$, что

1. $q = q_{n-m} \geqslant r_{n-m-1} \geqslant q_{n-m-1} \geqslant r_{n-m-2} \geqslant \dots \geqslant q_0 > 1$;
2. $\varkappa_i = \rho_i\alpha_i + (1/q_{i-1} - 1/q_i)|\alpha_i| \geqslant 1$, $\sigma_i = \rho_i\alpha_i + (1/r_{i-1} - 1/q_i)|\alpha_i| \leqslant 1$, $i = 1, \dots, n-m$;
3. $\varkappa_j = \rho_j\alpha_j + (1/q_{j-1} - 1/r_j)|\alpha_j| \geqslant 1$, $\rho_\nu\alpha_\nu = 1$, $\nu = n, \dots, n-m+1$;
4. $\bar\sigma_j = \rho_j\alpha_j + (1/r_{j-1} - 1/r_j)|\alpha_j| \leqslant 1$, $j = 1, \dots, n-m-1$.

Тогда существует обобщенное решение уравнения (1) *, *удовлетворяющее оценке*

$$\|D^\rho U_0, L_q\| \leqslant c(\|f, L_{q_0}\| + \|f, L_{r_0}\|), \tag{3}$$

где c не зависит от f, $\rho = \sum_{\nu=1}^{n} \rho_\nu$ удовлетворяет условиям теоремы.

Всякое регулярное решение, для которого имеет место

$$\lim_{|S| \to \infty} M_S[D^\rho U(x)] = 0$$

для почти всех $x \in E_k$ удовлетворяет оценке (3).

Следующий результат относится к оценкам в нормах типа Гёльдера. Положим $0 < \varepsilon_i^\nu \leqslant 1$, $i = 1, \dots, k_\nu$, $\nu = 1, \dots, n$,

$$\|f, C_\varepsilon\| = \sup_{\substack{|v| > 0\\ x \in E_k}} \prod_{\nu=1}^{n} \prod_{i=1}^{k_\nu} (1 + |v_i^\nu|)^{\varepsilon_i^\nu} |M_v[f]|,$$

$$\|f, C^l\| = \sum_{i=1}^{k} \left[\sum_{j=1} \sup_{\substack{x \in E_k\\ |h| \leqslant 1}} \frac{|\Delta_h(D^{\bar l_i} f, l_i)|}{h^{\mu_i}} + \sum_{m=0}^{\bar l_i} \sup_{x \in E_k} \left| \frac{\partial^m}{\partial x_i^m} f \right| \right],$$

где $l = (l_1, \dots, l_k)$, $l_i = \bar l_i + \mu_i$, $\bar l_i$ — целое, $0 < \mu_i < 1$,

$$\Delta_h(fl_i) = f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n),$$

$$\|f, C_\varepsilon^l\| = \sum_{i=1}^{k} \sum_{m=0}^{\bar l_i} \left\| \frac{\partial^m}{\partial x_i^m} f, C_\varepsilon \right\| \|f, C^l\|.$$

Будем считать, что все характеристические полиномы не имеют вещественных нулей при

$$|t| = \sum_{i=1}^{k} |t_i| \neq 0,$$

а показатели однородности $\alpha_\nu = (\alpha_{\nu,1} \dots \alpha_{\nu,k})$ удовлетворяют условию

$$\alpha_{\nu+1} = \omega_{\nu+1}\alpha_\nu, \quad \nu = 1, \dots, n-1,$$

где $\omega_{\nu+1}$ — положительные действительные числа. Тогда имеет место

* Обобщенное решение определяется здесь как предел сходящейся в себе последовательности функций U_h по полунорме $\|D^\rho U_h, L_q\|$, для которых выполняется

$$\|f - P(D)U_h, L_{q_0}\| + \|f - P(D)U_h, L_{r_0}\| \to 0, \quad h \to 0, \quad \rho = \sum_{\nu=1}^{n} \rho_\nu.$$

Теорема 2. *Пусть* $\|f, C_\varepsilon^l\| < \infty$, $l = (l_1, \ldots, l_k)$, $l_i = \bar{l}_i + \bar{\mu}_i$, $\bar{l}_i$ — *целое*, $0 < \mu_i < 1$, $\mu_i = \mu a_{\nu,i}^{-1}$, $1 \leqslant \nu \leqslant n$, $i = 1, \ldots, k$, $\rho = \sum_{i=1}^{n} \rho_\nu$, $0 < \varepsilon_i^\nu \leqslant 1$, $\varepsilon_\nu = (\varepsilon_1^\nu \ldots \varepsilon_k^\nu)$.

Тогда, если

$$(\rho_\nu + \varepsilon_\nu) a_\nu > 1, \qquad 0 \leqslant \rho_\nu a_\nu \leqslant 1, \quad \nu = 1, \ldots, n,$$

то существует обобщенное решение (1) *, *удовлетворяющее оценке*

$$\|D^\rho U, C^l\| + \|D^\rho U, C_{\bar{\varepsilon}}\| \leqslant c\|f, C_\varepsilon^l\|, \tag{4}$$

где $0 < \bar{\varepsilon}_i^\nu < \varepsilon_i^\nu(1 - (1 - \rho_\nu a_\nu) / \varepsilon_\nu a_\nu)$, $\nu = 1, \ldots, n$, $i = 1, \ldots, k$, $\rho = \sum_{\nu=1}^{n} \rho_\nu$, *а константа* c *не зависит от* f.

Для всякого регулярного решения U, удовлетворяющего условию

$$\lim_{|S| \to \infty} M_S [D^\rho U(x)] = 0,$$

для почти всех $x \in E_k$ справедлива оценка (4).

Замечание. Все результаты работы сохраняются для дифференциальных операторов, характеристический полином которых представляется в виде

$$P(it) = \prod_{\nu=1}^{n} P_\nu(it_\nu),$$

где операторы P_ν являются псевдодифференциальными с индексами $P_\nu(it_\nu)$, удовлетворяющими условиям а), б) и имеющими рост на бесконечности не выше степенного.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
9 III 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Хёрмандер, Линейные дифференциальные операторы с частными производными, М., 1965. [2] В. П. Паламодов, Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, М., 1967. [3] Б. Р. Вайнберг, Усп. матем. наук, 21, № 3, 129 (1966). [4] В. В. Грушин, Матем. сборн., 61, 103; № 2, 147 (1963). [5] В. П. Паламодов, ДАН, 129, № 4, 740 (1959). [6] В. П. Паламодов, ДАН, 132, № 3, 528 (1960). [7] О. В. Бесов, Матем. сборн., 73 (115), № 4, 585 (1967). [8] К. К. Головкин, В. А. Солонников, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова, 22, в. 4, 5 (1966). [9] С. В. Успенский, ДАН, 181, № 3, 562 (1968). [10] С. В. Успенский, ДАН, 187, № 5, 998 (1969). [11] J. Radon, Ber. Verh. Sächs. Acad., 69, 262 (1917).

---

* Обобщенное решение здесь определяется как предел сходящейся в себе последовательности функций U_h по полунорме $\|D^\rho U_h, C_\varepsilon^l\|$, для которых выполняется

$$\|f - P(D) U_h, c\| \to 0, \quad h \to 0, \quad \rho = \sum_{\nu=1}^{n} \rho_\nu.$$