Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 3

УДК 517.52 МАТЕМАТИКА

Д. Л. БЕРМАН

ОБ ОДНОМ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОМ АНАЛОГЕ КРИТЕРИЯ ВИНЕРА НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИИ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

(Представлено академиком А. Д. Александровым 24 VI 1970)

1°. Пусть $f(x)$ — вещественная конечная 2π-периодическая функция ограниченной вариации. Множество всех таких f обозначим через V. Положим

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos kt\,dt; \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin kt\,dt;$$

$$\rho_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}; \quad k = 1, 2, \ldots$$

Н. Винер ([1]) доказал теорему: *для того чтобы функция из V была непрерывна, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{n\to\infty}(\rho_1 + 2\rho_2 + \ldots + n\rho_n)/n = 0. \tag{1}$$

В практическом гармоническом анализе функция обычно задается на счетном множестве точек периода. Поэтому ставится вопрос: известны лишь значения функции f из V в равностоящих точках $\{x_k^{(n)}\}$ периода $[0, 2\pi]$

$$x_k^{(n)} = 2\pi k/(2n+1); \quad k = 0, 1, \ldots, (2n+1); \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Можно ли указать признак того, что f непрерывна? С помощью критерия Винера нельзя дать ответ на этот вопрос, ибо этот критерий требует, чтобы функция была задана почти везде. Настоящая заметка, в основном, посвящена решению упомянутого вопроса.

2°. Пусть $f(x)$ — вещественная конечная 2π-периодическая функция, заданная лишь в точках (2). Положим

$$a_k^{(n)}(f) \equiv a_k^{(n)} = \frac{2}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n} f(x_j^{(n)})\cos kx_j^{(n)}; \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

$$b_k^{(n)}(f) \equiv b_k^{(n)} = \frac{2}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n} f(x_j^{(n)})\sin kx_j^{(n)}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Теорема 1. *Имеет место тождество*

$$\sum_{j=0}^{2n} |f(x_{j+1}^{(n)}) - f(x_j^{(n)})|^2 = 2(2n+1)\sum_{k=1}^{n}(\sigma_k^{(n)})^2\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}; \tag{5}$$

$$\sigma_k^{(n)} = \sqrt{(a_k^{(n)})^2 + (b_k^{(n)})^2},$$

где узлы $x_j^{(n)}$ определяются согласно (2).

Доказательство. Составим тригонометрический интерполяционный полином Лагранжа $L_n(f, x)$ порядка n для функции f с узлами (2).

Как известно,

$$L_n(f, x) = \frac{a_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^{(n)} \cos kx + b_k^{(n)} \sin kx), \tag{6}$$

где $a_k^{(n)}$ и $b_k^{(n)}$ определяются согласно (3), (4). Так как

$$L_n(f, x_j^{(n)}) = f(x_j^{(n)}); \quad j = 0, 1, \ldots, 2n, \text{ то}$$

$$S \equiv \sum_{j=0}^{2n} |f(x_{j+1}^{(n)}) - f(x_j^{(n)})|^2 = \sum_{j=0}^{2n} |L_n(f, x_{j+1}^{(n)}) - L_n(f, x_j^{(n)})|^2 =$$

$$= \sum_{j=0}^{2n} \left| L_n\left(f, x_j^{(n)} + \frac{2\pi}{2n+1}\right) - L_n(f, x_j^{(n)}) \right|^2. \tag{7}$$

Известно, что для любого тригонометрического полинома $T(x)$ порядка n имеет место тождество *

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |T(x)^2| \, dx = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=0}^{2n} |T(x_j^{(n)})|^2. \tag{8}$$

Так как $L_n(f, x+h) - L_n(f, x)$, $h = 2\pi/(2n+1)$ — тригонометрический полином порядка n, то согласно (8)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |L_n(f, x+h) - L_n(f, x)|^2 \, dx = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=0}^{2n} |L_n(f, x_j^{(n)} + h) - L_n(f, x_j^{(n)})|^2. \tag{9}$$

Из (7) и (9) следует, что

$$S = \frac{2n+1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |L_n(f, x+h) - L_n(f, x)|^2 \, dx. \tag{10}$$

Вследствие (6) имеем

$$L_n(f, x+h) - L_n(f, x) = \sum_{k=1}^{n} 2 \sin \frac{kh}{2} \left[\left(b_k^{(n)} \cos \frac{kh}{2} - a_k^{(n)} \sin \frac{kh}{2} \right) \cos kx - \right.$$

$$\left. - \left(b_k^{(n)} \sin \frac{kh}{2} + a_k^{(n)} \cos \frac{kh}{2} \right) \sin kx \right]. \tag{11}$$

Согласно равенству Парсеваля из (11) получаем, что

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |L_n(f, x+h) - L_n(f, x)|^2 \, dx = \sum_{k=1}^{n} 4 (\sigma_k^{(n)})^2 \sin^2 \frac{kh}{2}. \tag{12}$$

Из (10) и (12) следует (5).

Теперь изложим решение вопроса из пункта 1°.

Теорема 2. *Пусть $f \in V$. Для того чтобы f была непрерывна, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{n \to \infty} (\sigma_1^{(n)} + 2\sigma_2^{(n)} + \ldots + n\sigma_n^{(n)})/n = 0. \tag{13}$$

По поводу доказательства заметим лишь следующее. Нужно воспользоваться тождеством (5) и известными неравенствами для коэффициентов $a_k^{(n)}$, $b_k^{(n)}$

$$|a_k^{(n)}| \leqslant (\operatorname{Var} f)/k; \quad |b_k^{(n)}| \leqslant (\operatorname{Var} f)/k; \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

---

* Для получения (8) достаточно в левой части (8) $T(x)$ заменить на $L_n(T, x)$, что возможно, ибо $L_n(T, x) \equiv T(x)$, и затем выполнить интегрирование.

В остальном доказательство не отличается от обычного доказательства теоремы Винера ([1, 2]).

Из теоремы Винера и теоремы 2 непосредственно получается

Следствие. *Если* $f \in V$, *то равенства* (1) *и* (13) *эквивалентны.*

3°. Пусть $f(x)$ — вещественная конечная 2π-периодическая функция. Будем говорить, что она квазиограниченной вариации, если

$$\overline{V} \equiv \overline{V}(f) = \sup_n \sum_{j=0}^{2n} |f(x_{j+1}^{(n)}) - f(x_j^{(n)})| < \infty,$$

где $x_j^{(n)} = 2\pi j \,/\, (2n+1)$; $j = 0, 1, \ldots, (2n+1)$; $n = 1, 2, 3, \ldots$ Множество всех таких f обозначим через KV. Очевидно, что $V \subset KV$. Легко построить пример, показывающий, что обратное утверждение неверно.

Теорема 3. *Если* $f \in KV$, *то*

$$|a_k^{(n)}(f)| \leqslant \overline{V}(f)/k, \quad |b_k^{(n)}| \leqslant \overline{V}(f)/k; \quad k = 1, 2, \ldots, n; \quad n = 1, 2, \ldots$$

Теорема 4. *Пусть f из KV и может иметь лишь разрывы первого рода. Для того чтобы f была непрерывна, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось* (13).

Доказательство не отличается от доказательства теоремы 2.

4°. Имеется ряд теорем, примыкающих к теореме Винера, которые остаются справедливыми, когда числа Фурье ρ_k заменяются числами $\sigma_k^{(n)}$. Мы здесь на этом не останавливаемся.

Поступило
10 VI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. К. Бари, Тригонометрические ряды, 1961, стр. 205. [2] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, 1939, стр. 220.