Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 3

УДК 517:54 *МАТЕМАТИКА*

В. Я. ГУТЛЯНСКИЙ

О РАССЛОЕНИИ КЛАССА ОДНОЛИСТНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 22 VI 1970)

1. Пусть S — класс всех голоморфных однолистных в круге E_z : $|z| < 1$ функций $w = f(z)$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ и $\mathfrak{M}$ — класс всех неубывающих функций $\mu(x, y)$ двух переменных в области $[0, \infty) \times [-\pi, \pi]$, нормированных условиями: $\mu(x, -\pi) = \mu(0, y) = 0$, $\mu(x, \pi) = x$.

Обозначим через P_x класс регулярных функций $P(w, x)$, $P(0, x) = 1$, $\operatorname{Re} P(w, x) > 0$, в круге E_w при фиксированном x, $0 \leqslant x < \infty$, измеримых по x, $0 < x < \infty$, при фиксированном w из E_w, которые допускают интегральное параметрическое представление вида

$$P(w, x) = G(u_1(w, x), \ldots, u_n(w, x)), \tag{1}$$

где

$$u_k(w, x) = \int_{-\pi}^{\pi} g_k(we^{iy})\, \mu'_{kx}(x)\,(dy).$$

Здесь $\mu_k(x, y) \in \mathfrak{M}$, $g_k(w)$ — аналитические по w в E_w ядровые функции и G — некоторая голоморфная функция n комплексных переменных со значениями из правой полуплоскости.

2. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$dw / dx = - wP(w, x), \quad 0 \leqslant x < \infty, \tag{2}$$

с начальным условием $w(x)|_{x=0} = z$, $z \in E_z$, где $P(w, x)$ — произвольная функция класса P_x.

Решение уравнения (2), удовлетворяющее начальному условию, будем обозначать через $f(z, x; \mu_1, \ldots, \mu_n)$.

В работе [1] показано, что предел

$$f(z) = \lim_{x\to\infty} e^x f(z, x; \mu_1, \ldots, \mu_n), \tag{3}$$

который существует, представляет собой функцию класса S.

Определение. Через $S(G; g_1, \ldots, g_n)$ обозначим подкласс функций $f(z)$ класса S, которые могут быть получены по формуле (3), когда $\mu_k(x, y)$, $k = 1, \ldots, n$, пробегают весь класс $\mathfrak{M}$.

Из этого определения и теоремы 1 [1] следует, что класс $S(u; g)$, где $g(w) = (1 + w)(1 - w)^{-1}$, совпадает со всем классом S.

Класс $S(G; g_1, \ldots, g_n)$ является компактным в себе относительно равномерной сходимости внутри круга E_z и связным.

Действительно, компактность вытекает из компактности в себе класса $\mathfrak{M}$ относительно определенной в [1] сходимости последовательности функций из $\mathfrak{M}$ и свойств решений уравнения (2). Связность следует из свойства непрерывной зависимости решения уравнения (2) от параметра и того факта, что вместе с любыми двумя функциями $\mu_k^{(1)}(x, y)$, $\mu_k^{(2)}(x, y)$ класса $\mathfrak{M}$ этому же классу принадлежит однопараметрическое семейство функций вида $\mu_k(x, y, \lambda) = (1 - \lambda)\mu_k^{(1)} + \lambda\mu_k^{(2)}$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $k = 1, \ldots, n$.

Специализируя функции G и g_h, можно получить различного рода расслоения класса S. Приведем некоторые из них.

1) Пусть $G(u) = u^{-1}$ и $g_\alpha(w) = (1 + (1-2\alpha)w)(1-w)^{-1}$, где α — произвольное вещественное число из промежутка $[0, 1]$. Класс $S(1/u, g_\alpha)$ обозначим через S_α.

Очевидно, класс S_1 состоит из единственного тождественного отображения круга $E_z: f(z) = z$. Далее, если α_1, α_2 — два произвольных числа из $[0, 1]$ таких, что $\alpha_1 < \alpha_2$, то имеет место включение $S_{\alpha_1} \supset S_{\alpha_2}$. Наконец, класс S_0 совпадает с классом S.

Отметим, что класс S_α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, включает в себя в качестве подкласса класс S_α^* звездообразных однолистных функций порядка α, введенный Робертсоном [2]. Классу S_α^* отвечают функции класса $\mathfrak{M}$ вида $\mu(x, y) = x\mu(y)$, где $\mu(y)$ — произвольная неубывающая функция на промежутке $[-\pi, \pi]$, нормированная условиями $\mu(-\pi) = \mu(-\pi + 0) = 0$, $\mu(\pi) = 1$. Действительно, в этом случае уравнение (2) интегрируется, причем

$$f(z) = \lim_{x\to\infty} e^x f(z, x; \mu) = z \exp\left(-2(1-\alpha)\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - ze^{iy})\, d\mu(y)\right) \tag{4}$$

Формула (4) является интегральным параметрическим представлением класса S_α^*.

2) Пусть $G(u) = u$ и $g_{(\alpha)}(w) = (1-w)(1 + (1-2\alpha)w)^{-1}$, где $\alpha \in [0, 1]$. Класс $S(u; g_{(\alpha)})$ обозначим через $S_{(\alpha)}$.

Для классов $S_{(\alpha)}$ справедливо включение $S_{(\alpha_1)} \supset S_{(\alpha_2)}$, если $\alpha_1 < \alpha_2$. При этом $S_{(0)} \equiv S$ и класс $S_{(1)}$ содержит единственный тождественный элемент.

При любом фиксированном α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, класс $S_{(\alpha)}$ содержит в себе класс S_α^* всех звездообразных функций $f(z)$, для которых в круге E_z выполняется условие $|zf'(z)/f(z) - 1/2\alpha| < 1/2\alpha$.

3) Обозначим через $g_\sigma(w)$ функцию вида

$$g_\sigma(w) = \int_0^1 \frac{1+wt}{1-wt}\, d\sigma(t), \tag{5}$$

где $\sigma(t)$ — произвольная неубывающая на $[0, 1]$ функция, подчиненная условиям: $\sigma(0) = 0$, $\sigma(1) = 1$, $\sigma(t) = (\sigma(t-0) + \sigma(t+0))/2$, $0 < t < 1$, $\int_\rho^1 d\sigma(t) > 0$ для любого ρ, $0 < \rho < 1$. Эту функцию впервые ввел в рассмотрение М. М. Джрбашян [3].

Пусть теперь функция G имеет вид $G(u) = u^{-1}$, а $g(w) = g_\sigma(w)$. Класс $S(u^{-1}; g_\sigma)$ обозначим через S_σ. В частности, если функция $\sigma(t)$ имеет вид

$$\sigma_0(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < 1, \\ 1, & t = 1, \end{cases}$$

то класс $S_{\sigma_0} \equiv S$.

Класс S_σ содержит в себе в качестве подкласса класс S_σ^* однолистных звездообразных функций, введенный М. М. Джрбашяном [3], который получается из всего класса S, если функции $\mu(x, y)$ имеют частный вид, указанный во втором примере. При этом уравнение (2) интегрируется и

$$f(z) = \lim_{x\to\infty} e^x f(z, x; \mu) = z \exp\left\{-2\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^1 \ln(1 - zte^{iy})\, d\sigma(t)\right) d\mu(y)\right\}. \tag{6}$$

3. Приведем некоторые теоремы о геометрических свойствах конформных отображений, осуществляемых функциями введенных в п. 2 классов.

Теорема 1. *Пусть действительный функционал* $I(f)$ *вида*

$$I(f)=\sum_{k=1}^{4} l_k X_k, \tag{7}$$

где $X_1+iX_2=\ln[f(z_0)/z_0]$, $X_3+X_4=\ln f'(z_0)$, l_k — *произвольные вещественные числа,* z_0 — *фиксированная точка круга* E_z, *определен на классе* $S\,(G;g_1,\ldots,g_n)$.

Тогда для $I(f)$ *справедливы точные оценки*

$$\int_0^{|z_0|}\Psi(\rho)\,d\rho/\rho\leqslant I(f)\leqslant\int_0^{|z_0|}\Phi(\rho)\,d\rho/\rho. \tag{8}$$

Здесь Φ, Ψ — *соответственно точная верхняя и точная нижняя оценки функционала*

$$I(P)=\frac{1}{\operatorname{Re}P(\zeta)}\Big\{(l_1+l_3)(1-\operatorname{Re}P(\zeta))-(l_2+l_4)\operatorname{Im}P(\zeta)-l_3\operatorname{Re}\zeta P'(\zeta)-$$
$$-l_4\operatorname{Im}\zeta P'(\zeta)\Big\}, \tag{9}$$

точка $\zeta=\rho e^{i\varphi}\in E_\zeta$ *и фиксирована, на классе всех аналитических функций* $w=P(\zeta)$, $P(0)=1$, $\operatorname{Re}P(\zeta)>0$ *в* E_ζ, *имеющих интегральное параметрическое представление вида* *

$$P(\zeta)=G(u_1(\zeta),\ldots,u_n(\zeta)),$$

где

$u_k(\zeta)=\int_{-\pi}^{\pi}g_k(\zeta e^{iy})\,d\mu_k(y)$, и $\mu_k(y)$ — *неубывающие функции на* $[-\pi,\pi]$, *нормированные условиями:* $\mu_k(-\pi)=\mu_k(-\pi+0)=0$, $\mu_k(\pi)=1$.

Приведем некоторые следствия сформулированной теоремы.

Следствие 1. *В классе* S_α, $0\leqslant\alpha\leqslant1$ *при фиксированном значении* z, $|z|=r<1$, *имеют место точные оценки*

$$r(1+r)^{2(\alpha-1)}\leqslant|f(z)|\leqslant r(1-r)^{2(\alpha-1)}. \tag{10}$$

Знак равенства достигается только для функций вида $e^{i\theta}f(ze^{i\theta})$, $0\leqslant\theta<2\pi$, где $f(z)=z(1-z)^{2(\alpha-1)}$, которая принадлежит также классу S_α^*.

Следствие 2. *В классе* $S_{(\alpha)}$, $0\leqslant\alpha\leqslant1$, *при фиксированном значении* z, $|z|=r<1$, *имеют место точные оценки*

$$r(1+(1-2\alpha)r)^{2(\alpha-1)/(1-2\alpha)}\leqslant|f(z)|\leqslant r(1-(1-2\alpha)r)^{2(\alpha-1)/(1-2\alpha)}, \tag{11}$$

при $\alpha\neq{}^1/_2$, *и*

$$re^{-r}\leqslant|f(z)|\leqslant re^{r}, \tag{12}$$

если $\alpha={}^1/_2$.

Знак равенства достигается только для функций вида $f(z)=z(1-(1-2\alpha)ze^{i\theta})^{2(\alpha-1)/(1-2\alpha)}$, $0\leqslant\theta<2\pi$, если $\alpha\neq{}^1/_2$ и $f(z)=ze^{ze^{i\theta}}$, $0\leqslant\theta<2\pi$, если $\alpha={}^1/_2$. Экстремальные функции принадлежат классу $S_{(\alpha)}^*$.

Следствие 3. *Если функция* $f(z)$ *принадлежит классу* S_α $(S_{(\alpha)})$, *то круг* $|w|\leqslant1/4^{1-\alpha}$ $(|w|\leqslant(2-2\alpha)^{2(\alpha-1)/(1-2\alpha)}$ *при* $\alpha\neq{}^1/_2$, $|w|\leqslant e^{-1}$, *при* $\alpha={}^1/_2$), *но не всегда больший, целиком покрывается образом круга* E_z *при отображении* $w=f(z)$.

Следствие 4. *В классе* S_α, $0\leqslant\alpha\leqslant1$, *при фиксированном значении* z, $|z|=r<1$, *имеют место точные оценки*

$$|\arg f(z)/z|\leqslant2(1-\alpha)F(\arcsin r,k), \tag{13}$$

где $F(\varphi,k)$ — *эллиптическая функция первого рода и* $k=(1-2\alpha)$.

---

* Относительно решения экстремальных задач на классах аналитических функций, имеющих интегральное параметрическое представление см., например, работы [5–7].

Осуществляя в формулах (10)—(13) предельный переход при $\alpha \to 0$, приходим к хорошо известным (см., например, [4]) теоремам искажения и покрытия в классе S.

4. Известно [8], что в классе $S_\alpha^* \subset S_\alpha$ для коэффициентов функции $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ справедливы точные оценки

$$|a_n| \leqslant [\prod_{k=2}^{n} (k-2\alpha)]/(n-1)!, \quad n = 2, 3, \ldots, \tag{14}$$

причем знак равенства реализуется для функции $f(z) = z(1-ze^{i\theta})^{2(\alpha-1)}$.

В связи с проблемой коэффициентов теории однолистных функций возникает вопрос, имеют ли место оценки (14) во всем классе S_α? Отметим, что для любой функции $f(z) \in S_\alpha$, $|a_2| \leqslant 2(1-\alpha)$, $|a_3| \leqslant (1-\alpha)(3-2\alpha)$.

Донецкий вычислительный центр
Академии наук УССР

Донецкий государственный университет

Поступило
11 VI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Я. Гутлянский, ДАН, 194, № 4, 14 (1970). [2] M. S. Robertson, Ann. Math., 37, 334 (1936). [3] М. М. Джрбашян, Изв. АН АрмССР, 4, № 4, 225 (1969). [4] Г. М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного, «Наука», 1966. [5] И. А. Александров, В. Я. Гутлянский, ДАН, 165, № 5, 983 (1965). [6] В. А. Зморович, Укр. матем. журн., 17, № 4, 12 (1965). [7] Н. А. Лебедев, И. А. Александров, Тр. инст. матем. им. В. А. Стеклова АН СССР, 94, 79 (1968). [8] A. Schild, Am. J. Math., 87, № 1, 65 (1965).