Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 3

УДК 517.9 *МАТЕМАТИКА*

А. ДЖУРАЕВ

ОБ АНАЛОГЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА — ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ СОСТАВНОГО ТИПА

(Представлено академиком И. Н. Векуа 7 IV 1970)

Рассмотрим систему двух уравнений первого порядка относительно двух комплекснозначных функций $w_1(z)$, $w_2(z)$:

$$\frac{\partial w_i}{\partial \bar z} = \sum_{j=1}^{2} \left[q_{ij}(z) \frac{\partial w_j}{\partial z} + A_{ij}(z) w_j(z) + B_{ij}(z) \overline{w_j(z)} \right], \quad i = 1, 2. \qquad (1)$$

Эллиптические системы вида (1) и связанные с ними краевые задачи хорошо изучены ([1], [2]). При этом легко видеть, что эллиптичность системы (1) в некоторой области G равносильна тому, что корни $\lambda_1(z)$, $\lambda_2(z)$ уравнения $\lambda^2 - (q_{11}(z) + q_{22}(z))\lambda + q_{11}(z)q_{22}(z) - q_{12}(z)q_{21}(z) = 0$ удовлетворяют условию $|\lambda_j(z)| \neq 1$, $z \in G$. В настоящей работе мы поставим краевую задачу для системы (1), аналогичную краевой задаче Римана — Гильберта, в случае, когда $|\lambda_1(z)| \equiv 1$, $|\lambda_2(z)| \leqslant \mathrm{const} < 1$, $z \in G$. В этом случае (1) является системой составного типа.

Пусть $Q(z) = \|q_{ij}(z)\|$, E — единичная матрица второго порядка, а $\chi_j(z) = (\chi_{j1}(z), \chi_{j2}(z))$ — нетривиальное решение однородной системы $(Q' - \lambda E)\chi_j = 0$. Так как $\lambda_1(z) \neq \lambda_2(z)$, то, очевидно, $\det\|\chi_{ij}(z)\| \neq 0$, $z \in G$. Если $q_{ij}(z) \in C^1(G)$, то относительно функций $v_j(z) = \chi_{j1}(z) w_1(z) + \chi_{j2}(z) w_2(z)$ получим систему уравнений

$$\frac{\partial v_j}{\partial \bar z} - \lambda_j(z) \frac{\partial v_j}{\partial z} = \sum_{j=1}^{2} [A^0_{ij}(z) v_j(z) + B^0_{ij}(z) \overline{v_j(z)}]. \qquad (2)$$

Система (2) неособым преобразованием координат может быть приведена к виду ([3])

$$\begin{gathered} \partial v_1 / \partial \bar z - \partial v_1 / \partial z = a_{11}(z) v_1 + a_{12}(z) v_2 + b_{11}(z) \bar v_1 + b_{12}(z) \bar v_2, \\ \partial v_2 / \partial \bar z - \lambda(z) \partial v_2 / \partial z = a_{21}(z) v_1 + a_{22}(z) v_2 + b_{21}(z) \bar v_1 + b_{22}(z) \bar v_2 \\ (|\lambda(z)| \leqslant \mathrm{const} < 1). \end{gathered} \qquad (3)$$

Пусть ограниченная область G такова, что ее граница γ является замкнутой гладкой кривой, не имеющей отрезков, параллельных оси $x = 0$. Будем предполагать, что каждая прямая $x = \mathrm{const}$, проходящая через G, пересекает контур γ ровно в двух точках, а слева и справа от области G контур γ касается двух прямых семейства $x = \mathrm{const}$ соответственно в точках M и N с абсциссами $x = a$, $x = b$. Обозначим через γ_1 и γ_2 положительно ориентированные дуги $\overset{\frown}{NM}$ и $\overset{\frown}{MN}$, причем положительным направлением на γ считается то, которое оставляет область G слева, а замыкание γ_j обозначим через $\bar\gamma_j$. Пусть $y = \varphi_j(x)$ $(a < x < b)$ — уравнение кривой γ_j в декартовых координатах, а $\Gamma_1(z)$, $\Gamma_2(z)$ — решение системы интегральных уравнений типа Вольтерра:

$$\Gamma_1(z) + \int_{\varphi_2(x)}^{y} K(x + i\eta) \overline{\Gamma_2(x + i\eta)}\, d\eta = 1,$$

$$\Gamma_2(z)+\int\limits_{\varphi_2(x)}^{y} K(x+i\eta)\overline{\Gamma_1(x+i\eta)}\,d\eta=0, \tag{4}$$

где $$K(z)=ib_{11}(z)\exp(2i\operatorname{Re}\omega_1(z)),\quad \omega_1(z)=\int\limits_{\varphi_2(x)}^{y} a_{11}(x+i\eta)\,d\eta.$$

Легко убедиться, что функции $\Gamma_1(z)$ и $\Gamma_2(z)$ удовлетворяют тождеству $|\Gamma_1(z)|^2-|\Gamma_2(z)|^2\equiv 1$. Далее, пусть $\omega(z)=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{G} a_{22}(t)\,Z(t,z)\,dG_t$, где $Z(t,z)$ — ядро Коши уравнения Бельтрами $\partial u/\partial\bar z-\lambda(z)\partial u/\partial z=0$. Тогда в результате неособого преобразования

$$u_1(z)=\overline{\Gamma_1(z)}e^{i\omega_1(z)}v_1(z)-\Gamma_2(z)e^{-\overline{i\omega_1(z)}}\overline{v_1(z)},\qquad u_2(z)=e^{-\omega(z)}v_2(z) \tag{5}$$

система (3) преобразуется к виду:

$$\begin{gathered}\partial u_1/\partial y=a(z)u_2(z)+b(z)\overline{u_2(z)},\\ \partial u_2/\partial\bar z-\lambda(z)\partial u_2/\partial z-K_0(z)\overline{u_2(z)}=c(z)u_1(z)+d(z)\overline{u_1(z)}.\end{gathered} \tag{6}$$

В дальнейшем будем предполагать, что $\lambda(z)\in C_\nu^1(\overline{G})$, $0<\nu<1$, а все остальные коэффициенты системы (6) непрерывны по Гёльдеру в области $\overline{G}=G+\gamma$. Для системы (6) поставим следующую задачу

Задача E. Найти решения класса $C^1(G)\cap C_\nu(\overline{G})$ системы (6), удовлетворяющие краевым условиям

$$\operatorname{Re}\Big[\sum_{j=1}^{2} a_{ij}^{(k)}(t)\,u_j(t)\Big]_{\gamma_k}=h_i^{(k)}(t),\quad i,k=1,2, \tag{7}$$

где $a_{ij}^{(k)}(t)$, $h_i^{(k)}(t)$ — заданные на γ_k непрерывные по Гёльдеру функции *.

Задачу E мы исследуем при следующих условиях:

$$\begin{gathered}\Delta_{jj}(t_j)\neq 0,\quad \delta=1-\operatorname{Re}(\overline{\Delta_{12}(t_1)}/\Delta_{11}(t_1))\operatorname{Re}(\overline{\Delta_{21}(t_2)}/\Delta_{22}(t_2))\neq 0,\\ \Delta_0(t_1,t_2)=\overline{\Delta_{11}(t_1)}\,\overline{\Delta_{22}(t_2)}-\Delta_{12}(t_1)\Delta_{21}(t_2)\neq 0,\end{gathered} \tag{8}$$

$$a_{j1}^{(1)}(M_k)=ia_{j1}^{(2)}(M_k),\ a_{j2}^{(1)}(M_k)=a_{j2}^{(2)}(M_k),\ \operatorname{Im}[a_{11}^{(j)}(M_k)\overline{a_{21}^{(j)}(M_k)}]=0, \tag{9}$$

где $\Delta_{j1}(t)=a_{22}^{(j)}(t)\operatorname{Re}a_{11}^{(j)}-a_{11}^{(j)}(t)\operatorname{Re}a_{21}^{(j)}(t)$, $\Delta_{j2}(t)=\overline{a_{12}^{(j)}(t)}\operatorname{Im}a_{21}^{(j)}(t)-\overline{a_{22}^{(j)}(t)}\operatorname{Im}a_{11}^{(j)}(t)$, $t_j=x+i\varphi_j(x)\in\overline{\gamma}_j$, $a\leqslant x\leqslant b$.

Как обычно, если $h_i^{(k)}(t)\equiv 0$, то задачу E будем называть однородной и обозначать E_0. Однородной сопряженной задачей $E_0{}^*$ будем называть задачу нахождения решений класса $C^1(G)\cap C_\nu(G)$ системы уравнений

$$\begin{gathered}\partial u_1^*/\partial y=iC(z)u_2^*(z)-id(z)\overline{u_2^*(z)},\\ \frac{\partial u_2^*}{\partial\bar z}-\frac{\partial}{\partial z}(\lambda(z)u_2^*)-\overline{K_0(z)}\,\overline{u_2^*(z)}=-ia(z)u_1^*(z)+i\overline{b(z)}\,\overline{u_1^*(z)},\end{gathered} \tag{10}$$

удовлетворяющих краевым условиям

$$\begin{gathered}\operatorname{Re}\Big[\frac{ix'(s)\operatorname{Im}[a_{22}^{(1)}(t)\overline{a_{12}^{(1)}(t)}]}{|\Delta_{11}(t)|^2}u_1^*(t)+\frac{\theta(s)}{2\Delta_{11}(t)}u_2^*(t)\Big]_{\gamma_1}=0,\\ \operatorname{Re}\Big[\Big(1+i\operatorname{Re}\Big(\frac{\overline{\Delta_{12}(t)}}{\Delta_{11}(t)}\Big)\Big)x'(s)u_1^*(t)+\frac{i\theta(s)\operatorname{Im}[a_{11}^{(1)}(t)\overline{a_{21}^{(1)}(t)}]}{2\Delta_{11}(t)}u_2^*(t)\Big]_{\gamma_1}=0,\end{gathered} \tag{11}$$

* В работе [3] для системы (3) ставилась внешне аналогичная, но отличающаяся от этой областью задания краевых условий задача.

$$\operatorname{Re}\left[-\frac{x'(s)}{|\Delta_{22}(t)|^2}\operatorname{Im}[a_{22}^{(2)}(t)\overline{a_{12}^{(2)}(t)}]+\frac{\theta(s)}{2\Delta_{22}(t)}u_2^*(t)\right]_{\gamma_2}=0,$$

$$\operatorname{Re}\left[\left(\operatorname{Re}\left(\frac{\overline{\Delta_{21}(t)}}{\Delta_{22}(t)}\right)+i\right)x'(s)u_1^*(t)+\frac{i\theta(s)\operatorname{Im}[a_{11}^{(2)}(t)\overline{a_{21}^{(2)}(t)}]}{2\overline{\Delta_{22}(t)}}u_2^*(t)\right]_{\gamma_2}=0, \tag{12}$$

где $\theta(s)=t'(s)+\lambda(t)\overline{t'(s)}$, а $t=t(s)=x(s)+iy(s)$ — параметрическое уравнение кривой γ.

Лемма. *Для того чтобы задача* E *была разрешима, необходимо, чтобы для любого решения* $(u_1^*(z), u_2^*(z))$ *задачи* E_0^* *выполнялось равенство*

$$\int_{\gamma_1}\left\{h_{21}(t)x'(s)\operatorname{Im}u_1^*(t)+h_{11}(t)\operatorname{Re}\left[\frac{\theta(s)u_2^*(t)}{2i\Delta_{11}(t)}\right]\right\}ds+$$

$$+\int_{\gamma_2}\left\{h_{22}(t)x'(s)\operatorname{Re}u_1^*(t)+h_{12}\operatorname{Re}\left[\frac{\theta(s)u_2^*(t)}{2i\overline{\Delta_{22}(t)}}\right]\right\}ds=0, \tag{*}$$

где
$$h_{1j}(t)=h_2^{(j)}(t)\operatorname{Re}a_{11}^{(j)}(t)-h_1^{(j)}(t)\operatorname{Re}a_{21}^{(j)}(t),$$
$$h_{2j}(t)=\operatorname{Re}[(h_1^{(j)}(t)a_{22}^{(j)}(t)-h_2^{(j)}(t)a_{12}^{(j)}(t))/\Delta_{jj}(t)].$$

Доказательство. Прежде всего в силу неравенств $\Delta_{jj}(t_j)\neq 0$, $j=1,2$, нетрудно показать, что условия (7) могут быть записаны в виде

$$\operatorname{Re}[-i\operatorname{Im}[a_{11}^{(1)}(t)\overline{a_{21}^{(1)}(t)}]u_1(t)+\Delta_{11}(t)u_2(t)]_{\gamma_1}=h_{11}(t), \tag{13}$$

$$\operatorname{Re}\left[\left(1-i\operatorname{Re}\left(\frac{\Delta_{12}(t)}{\Delta_{11}(t)}\right)\right)u_1(t)-\frac{i\operatorname{Im}[a_{22}^{(1)}(t)\overline{a_{12}^{(1)}(t)}]}{\overline{\Delta_{11}(t)}}u_2(t)\right]_{\gamma_1}=h_{21}(t), \tag{14}$$

$$\operatorname{Re}[-i\operatorname{Im}[a_{11}^{(2)}(t)\overline{a_{21}^{(2)}(t)}]u_1(t)+\overline{\Delta_{22}(t)}u_2(t)]_{\gamma_2}=h_{12}(t), \tag{15}$$

$$\operatorname{Re}\left[\left(\operatorname{Re}\left(\frac{\overline{\Delta_{21}(t)}}{\Delta_{22}(t)}\right)-i\right)u_1(t)-\frac{i\operatorname{Im}[a_{12}^{(2)}(t)\overline{a_{12}^{(2)}(t)}]}{\Delta_{22}(t)}u_2(t)\right]_{\gamma_2}=h_{22}(t). \tag{16}$$

Отсюда, если $(u_1(z), u_2(z))$ — решение задачи E, то при $t\in\gamma_1$

$$\operatorname{Re}u_1(t)=-\chi_1(t)\operatorname{Im}[a_{22}^{(1)}(t)\overline{a_{12}^{(1)}(t)}]/|\Delta_{11}(t)|^2-$$
$$-\operatorname{Re}(\overline{\Delta_{12}(t)}/\Delta_{11}(t))\operatorname{Im}u_1(t)+h_{21}(t),$$

$u_2(t)=i\chi_1(t)/\Delta_{11}(t)-\operatorname{Im}[a_{11}^{(1)}(t)\overline{a_{21}^{(1)}(t)}]\operatorname{Im}u_1(t)/\Delta_{11}(t)+h_{11}(t)/\Delta_{11}(t)$, а

при
$$t\in\gamma_2:\operatorname{Im}u_1(t)=-\chi_2(t)\operatorname{Im}[a_{22}^{(2)}(t)\overline{a_{12}^{(2)}(t)}]/|\Delta_{22}(t)|^2-$$
$$-\operatorname{Re}(\overline{\Delta_{21}(t)}/\Delta_{22}(t))\operatorname{Re}u_1(t)+h_{22}(t),\quad u_2(t)=$$
$$=\operatorname{Im}[a_{11}^{(2)}(t)\overline{a_{21}^{(2)}(t)}]\operatorname{Re}u_1(t)/\overline{\Delta_{22}(t)}+i\chi_2(t)/\overline{\Delta_{22}(t)}+h_{22}(t)/\overline{\Delta_{22}(t)},$$

где $\chi_1(t)=\operatorname{Im}[\Delta_{11}(t)u_2(t)]$, $t\in\gamma_1$; $\chi_2(t)=\operatorname{Im}[\overline{\Delta_{22}(t)}u_2(t)]$, $t\in\gamma_2$.

Подставляя эти выражения для $\operatorname{Re}u_1(t)$, $u_2(t)$ при $t\in\gamma_1$ и $\operatorname{Im}u_1(t)$, $u_2(t)$ при $t\in\gamma_2$ в тождество

$$\sum_{j=1}^{2}\int_{\gamma_j}\left\{[\operatorname{Re}u_1(t)\operatorname{Im}u_1^*(t)+\operatorname{Im}u_1(t)\operatorname{Re}u_1^*(t)]x'(s)+\right.$$
$$\left.+\operatorname{Re}\left[\frac{\theta(s)}{2i}u_2(t)u_2^*(t)\right]\right\}ds=0,$$

убеждаемся в справедливости леммы.

Теорема. *Если выполнены условия* (8)—(9), *то имеет место формула*

$$\operatorname{Ind}E=1+\frac{1}{\pi}\{\arg\Delta(t)\}_{\gamma}.$$

Укажем схему доказательства. Если ограничиться рассмотрением главной части системы (6), то $u_1(z) \equiv \omega(x)$, $u_2(z) \equiv u(z)$, где $\omega(x)$ — произвольная комплекснозначная функция одной переменной, а $u(z)$ — регулярное решение уравнения $\partial u / \partial \bar z - \lambda(z) \partial u / \partial z - K_0(z) \bar u = 0$, $|\lambda(z)| \leqslant \leqslant \text{const} < 1$. В этом случае из условий (14) и (16) легко найдем

$$\operatorname{Re} \omega(x) = \frac{1}{\delta} \operatorname{Re} \left\{ \frac{i \operatorname{Im} [a_{22}^{(1)}(t_1) \overline{a_{12}^{(1)}(t_1)}]}{\overline{\Delta_{11}(t)}} u(t_1) - \operatorname{Re} \left(\frac{\Delta_{12}(t_1)}{\overline{\Delta_{11}(t_1)}} \right) \frac{\operatorname{Im} [a_{22}^{(2)}(t_2) \overline{a_{21}^{(2)}(t_2)}]}{\Delta_{22}(t_2)} \times \right.$$

$$\left. \times u(t_2) \right\} + h_1^0(x), \quad \operatorname{Im} \omega(x) = \frac{1}{\delta} \operatorname{Re} \left\{ \frac{i \operatorname{Im} [a_{22}^{(2)}(t_2) \overline{a_{12}^{(2)}(t_2)}]}{\Delta_{22}(t_2)} u(t_2) - \right.$$

$$\left. - i \operatorname{Re} \left(\frac{\Delta_{21}(t_2)}{\overline{\Delta_{22}(t_2)}} \right) \frac{\operatorname{Im} [a_{22}^{(1)}(t_1) \overline{a_{12}^{(1)}(t_1)}]}{\Delta_{11}(t_1)} u(t_1) \right\} + h_2^0(x).$$

Подставляя значение $\operatorname{Im} \omega(x)$ в (13) и $\operatorname{Re} \omega(x)$ в (14) и принимая во внимание легко проверяемые тождества

$$\operatorname{Im} [\overline{\Delta_{11}(t_1)}\, \overline{\Delta_{12}(t_1)}] = \operatorname{Im} [a_{11}^{(1)}(t_1) \overline{a_{21}^{(1)}(t_1)}] \operatorname{Im} [a_{22}^{(1)}(t_1) a_{12}^{(1)}(t_1)],$$
$$\operatorname{Im} [\overline{\Delta_{22}(t_2)}\, \overline{\Delta_{21}(t_2)}] = \operatorname{Im} [a_{11}^{(2)}(t_2) \overline{a_{12}(t_1)}] \operatorname{Im} [a_{22}^{(2)}(t_2) a_{12}^{(2)}(t_2)],$$

получим следующие краевые условия для определения функции $u(z)$:

$$\operatorname{Re} (A(t_1) u(t_1) + B(t_1) u(t_2)) = h(t_1),$$
$$\operatorname{Re} (A(t_2) u(t_2) + B(t_2) u(t_1)) = h(t_2), \tag{17}$$

где

$$A(t_1) = \Delta_{11}(t_1) - \overline{\Delta_{12}(t_1)} \operatorname{Re}(\Delta_{21}(t_1) / \overline{\Delta_{22}(t_1)}),$$
$$A(t_2) = \overline{\Delta_{22}(t_2)} - \Delta_{21}(t_2) \operatorname{Re}(\Delta_{12}(t_1) / \overline{\Delta_{11}(t_1)}),$$
$$B(t_1) = i \operatorname{Im} [a_{11}^{(1)}(t_1) \overline{a_{21}^{(1)}(t_1)}] \operatorname{Im} [a_{22}^{(2)}(t_2) \overline{a_{12}^{(1)}(t_2)}],$$
$$B(t_2) = -i \operatorname{Im} [a_{11}^{(2)}(t_2) \overline{a_{21}^{(2)}(t_2)}] \operatorname{Im} [a_{22}^{(1)}(t_1) \overline{a_{12}^{(1)}(t_1)}].$$

Воспользовавшись функцией $\alpha(s)$, введенной в ([5]), условия (17) запишем так:

$$\operatorname{Re}(A(t) u(t) + B(t) u[t(\alpha(s))]) = h(t), \quad t \in \gamma. \tag{18}$$

Несколько модифицируя прием, указанный в моей работе ([5]), или же используя ([6]), можно показать, что если $\Delta(t) = \overline{A(t)} A[t(\alpha(s))] - - B(t) \overline{B[t(\alpha(s))]} \neq 0$ при $t \in \gamma$, то индекс задачи (17) равен $1 + \frac{1}{\pi} \{\arg \Delta(t)\}_\gamma$. Но легко видеть, что $\Delta(t) = \Delta_0(t_1, t_2)$, $t \in \gamma$, и $\Delta(t) = = \Delta_0\overline{(t_1, t_2)}$ при $t \in \gamma_2$, где $\Delta_0(t_1, t_2)$ определено в (8).

В общем случае системы (6) для исключения $\operatorname{Re} \omega(x)$, $\operatorname{Im} \omega(x)$ мы получим фредгольмову систему интегральных уравнений на отрезке, а вместо условия (17) мы получим условие вида $\operatorname{Re}(A(t) u(t) + + B(t) u[t(\alpha(s))] + T(u)) = h(t)$, где $T(u)$ — некоторый интегральный вполне непрерывный оператор и, следовательно, индекс последней задачи будет равен индексу задачи (17).

Физико-технический институт
Академии наук ТаджССР
Душанбе

Поступило
18 III 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Н. Векуа, Обобщенные аналитические функции, М., 1959. [2] Б. В. Боярский, ДАН, 124, № 1 (1958). [3] А. Джураев, ДАН, 181, № 3 (1968). [4] А. Джураев, Докторская диссертация, Матем. инст. АН ГрузССР, 1967. [5] А. Джураев, Изв. АН СССР, сер. матем., 31, № 3 (1967). [6] Г. С. Литвинчук, Э. Г. Хасабов, УМН, 20, 6 (126), 124 (1965).