Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 3

УДК 519.47 МАТЕМАТИКА

Л. Ф. КАРАУЛЬНАЯ

АСИМПТОТИКА БИРКГОФА — ТАМАРКИНА В ОПЕРАЦИОННОМ ИСЧИСЛЕНИИ

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 29 VI 1970)

При решении некоторых смешанных задач для линейных уравнений с разрывными коэффициентами с помощью операционного исчисления мы приходим к краевой задаче, содержащей комплексный параметр p:

$$u_i'' + a_{i1}(x, p)u_i' + a_{i2}(x, p)u_i = \Phi_i(x, p); \tag{1}$$

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 \frac{du_1}{dx}\bigg|_{x=a} = F_0(p), \quad \alpha_3 u_n + \alpha_4 \frac{du_n}{dx}\bigg|_{x=b} = F_n(p); \tag{2}$$

$$\beta_{i1}u_i + \beta_{i2}u_{i+1}|_{x=x_i} = F_{1i}(p), \quad \beta_{i3}\frac{du_i}{dx} + \beta_{i4}\frac{du_{i+1}}{dx}\bigg|_{x=x_i} = F_{2i}(p); \tag{3}$$

где $x \in (x_{i-1}, x_i)$; $i = 1, 2, \ldots, n$; $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$;

$$\alpha_\nu = \sum_{k=0}^{n_\nu} \alpha_{\nu k}p^k; \quad \beta_{i\nu} = \sum_{k=0}^{n_{i\nu}} \beta_{i\nu k}p^k \quad (\nu = 1, 2, 3, 4);$$

$\alpha_{\nu k}$, $\beta_{i\nu k}$, n_ν, $n_{i\nu}$ постоянны.

Пусть при $|p| > R$, где R достаточно большое число, $a_{ik}(x, p) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{ik\nu}(x)\,p^{k-\nu}$ $(k = 1, 2;\ i = 1, 2, \ldots, n)$, $a_{ik\nu}(x)$ удовлетворяют условиям теоремы Биркгофа — Тамаркина ([1], [3]).

Решение задачи (1) — (3) при $\alpha_2 \neq 0$, $\alpha_4 \neq 0$, $\beta_{k1} \neq 0$, $\beta_{k3} \neq 0$ может быть записано в виде ([2])

$$u_i(x, p) = \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} G_{ik}(x, \xi, p)\,\Phi_k(\xi, p)\,d\xi + \frac{F_0(p)}{\alpha_2(p)}G_{i1}(x, a, p) -$$
$$- \frac{F_n(p)}{\alpha_4(p)}G_{in}(x, b, p) - \sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{F_{2k}(p)}{\beta_{k3}(p)}G_{ik}(x, x_k, p) - \frac{F_{1k}(p)}{\beta_{k1}(p)}\frac{\partial G_{ik}}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=x_k}\right]. \tag{4}$$

Здесь $G_{ik}(x, \xi, p) = \Delta_{ik}(x, \xi, p) / \Delta(p)$ — клеточная функция Грина задачи (1) — (3); $\Delta_{ik}(x, \xi, p)$ и $\Delta(p)$ — определители порядка $(2n+1)$ и $2n$, элементы которых выражаются через α_ν, $\beta_{i\nu}$ и фундаментальную систему частных интегралов $u_s^i(x, p)$ $(s = 1, 2)$ однородного уравнения, соответствующего уравнению (1).

Для выражения (4) может быть получено асимптотическое представление при больших $|p|$ на основании асимптотики Биркгофа — Тамаркина для $u_s^i(x, p)$ $(s = 1, 2)$. Пусть $r_s^i(x)$ $(s = 1, 2)$ — различные корни характеристического уравнения $r^2 + a_{i10}(x)r + a_{i20}(x) = 0$ такие, что при подходящей их нумерации в отдельных частях области $|p| > R$ выполняются неравенства $\operatorname{Re} pr_1^i(x) \leqslant \operatorname{Re} pr_2^i(x)$. Тогда на основании теоремы Тамаркина для $d^m u_s^i / dx^m$ $(s = 1, 2;\ m = 0, 1, 2)$ можно записать следующее асимптотическое представление:

$$\frac{d^m u_s^i(x, p)}{dx^m} = p^m \left\{ \sum_{\nu=0}^{\varkappa-1} \eta_{s\nu m}^i(x) p^{-\nu} + \frac{1}{p^\varkappa} H_{sm}^i(x, p) \right\} \exp\left[p \int_{x_{i-1}}^{x} r_s^i(\alpha) d\alpha \right], \qquad (5)$$

где $\varkappa$ — некоторое фиксированное число, определяемое степенью гладкости коэффициентов уравнения (1); функции $\eta_{s\nu m}^i(x)$, выражающиеся через коэффициенты уравнения (1), непрерывно дифференцируем $(\varkappa - \nu)$ раз $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, \varkappa - 1)$; $H_{sm}{}^i(x, p)$ непрерывна по x и ограничена при больших $|p|$.

Введя далее обозначения $z_s{}^i(\xi, p) = (-1)^s u_{3-s}^i(\xi, p) / W^i(\xi, p)$, где $W^i(\xi, p)$ — определитель Вронского функций $u_s{}^i(\xi, p)$ $(s = 1, 2)$, и получив на основании (5) асимптотическое представление

$$z_s^i(\xi, p) = (-1)^s \frac{1}{p} \left\{ \sum_{\nu=0}^{\varkappa-1} \zeta_{s\nu}^i(\xi) p^{-\nu} + \frac{1}{p^\varkappa} z_s^i(\xi, p) \right\} \exp\left[-p \int_{x_{i-1}}^{\xi} r_s^i(\alpha) d\alpha \right],$$

$$(s = 1, 2), \qquad (6)$$

можно получить асимптотическое представление для функции Грина и ее производных:

$$\frac{\partial^m G_{ik}(x, \xi, p)}{\partial x^m} = -p^{m-1} \left\{ [\eta_{s0m}^i(x)] [\zeta_{s0}^i(\xi)] \delta_{ik} \exp\left[p \int_{\xi}^{x} r_s^i(\alpha) d\alpha \right] + \right.$$

$$+ [\zeta_{10}^k(\xi)] D_{1k}^{im}(x, p) \exp\left[p \int_{\xi}^{x_k} r_1^k(\alpha) d\alpha \right] +$$

$$+ [\zeta_{20}^k(\xi)] D_{2k}^{im}(x, p) \exp\left[-p \int_{x_{k-1}}^{\xi} r_2^k(\alpha) d\alpha \right], \qquad (7)$$

где $s = 1$ при $\xi \leqslant x$, $s = 2$ при $\xi \geqslant x$; $m = 0, 1, 2$.

Здесь

$$D_{sk}^{im}(x, p) = D_{sk1}^{im}(p) \exp\left[p \int_{x_{i-1}}^{x} r_1^i(\alpha) d\alpha \right] + D_{sk2}^{im}(p) \exp\left[-p \int_{x}^{x_i} r_2^i(\alpha) d\alpha \right],$$

$D_{sk1}^{im}(p), D_{sk2}^{im}(p)$ $(s = 1, 2)$ ограничены при больших $|p|$; δ_{ik} — символ Кронекера. Через $[\eta_{i0m}^s(x)]$, $[\zeta_{s0}{}^i(\xi)]$ для краткости обозначены выражения, стоящие в фигурных скобках равенств (5), (6) соответственно.

Асимптотическое представление (7) справедливо при больших $|p|$ в комплексной p-плоскости с выброшенными внутренностями малых кругов радиуса ε с центрами в нулях определителя $\Delta(p)$.

Так как решение задачи (1)—(3) полностью выражается через клеточную функцию Грина, то на основании (4), (7) легко получаем асимптотическое представление для $d^m u_i(x, p) / dx^m$ $(m = 0, 1, 2)$, т. е. для решения задачи (1)—(3) и его двух первых производных.

Белорусский политехнический институт
Минск

Поступило
25 VI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Я. Д. Тамаркин, О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды, 1917. [2] А. В. Иванов, Изв. АН БССР, сер. физ.-техн. наук, № 3 (1963). [3] G. D. Birkhoff, Trans. Am. Math. Soc., 9, 219 (1908).