Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 3

УДК 517.948:513.88 **МАТЕМАТИКА**

Р. И. КАЧУРОВСКИЙ

О НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРАХ, ОБЛАСТЯМИ ЗНАЧЕНИЙ КОТОРЫХ ЯВЛЯЮТСЯ ПОДПРОСТРАНСТВА

(Представлено академиком Г. И. Петровым 9 XII 1969)

В данной работе через X, Y обозначаются банаховы пространства, через X^*, Y^* — их сопряженные. Пусть $T\colon D(T) \to Y$ — линейный замкнутый оператор, определенный на всюду плотном в X множестве $D(T)$. Хорошо известны следующие предложения ([1]).

Предложение 1. *Пусть множество значений оператора T замкнуто в Y. Для того чтобы при данном $y \in Y$ уравнение $Tx = y$ было разрешимо, необходимо и достаточно, чтобы $y \in \{\operatorname{Ker} T^*\}^\perp$.*

Предложение 2. *Пусть множество значений оператора T^* замкнуто в X^*. Для разрешимости уравнения $T^*v = w$ при данном $w \in X^*$ необходимо и достаточно, чтобы $w \in \{\operatorname{Ker} T\}^\perp$.*

Здесь и в дальнейшем T^* — оператор, сопряженный к T, $\operatorname{Ker} T = \{x\colon\ Tx = \theta,\ x \in X\}$; $\operatorname{Ker} T^* = \{v\colon\ T^*v = \theta,\ v \in Y^*\}$; $\{\operatorname{Ker} T\}^\perp = \{v\colon\ v \in X^*,\ (v, x) = 0,\ \forall x \in \operatorname{Ker} T\}$; $\{\operatorname{Ker} T^*\}^\perp = \{w\colon\ w \in Y,\ (y^*, w) = 0,\ \forall y^* \in \operatorname{Ker} T^*\}$.

Записи (v, x) и (y^*, w) дают значения линейных функционалов на элементах соответствующих пространств.

В данной заметке получены частичные обобщения предложений 1, 2 на некоторые классы нелинейных уравнений (теоремы 1, 2). Теорема 3 обобщает на нелинейные уравнения известный результат С. Г. Михлина ([2]) о линейных уравнениях, допускающих регуляризацию. В следующих двух теоремах даны условия замкнутости и слабой замкнутости областей значений нелинейных операторов специального вида. Полученные результаты используются для изучения краевых задач для уравнений с частными производными.

Как и в ([3]), при доказательстве основных результатов используем известный принцип Шаудера — Тихонова ([4]).

1. Теорема 1. *Пусть $T\colon X \to Y$ — определенный во всем X линейный ограниченный оператор с замкнутой в Y областью значений, для которого $\operatorname{Ker} T$ конечномерно. Пусть $\Omega\colon X \to Y$ — определенный во всем X нелинейный вполне непрерывный* оператор, обладающий свойствами*

$$\text{а)}\ \Omega(x) \in \{\operatorname{Ker} T^*\}^\perp \quad \forall x \in X; \quad \text{б)}\ \lim_{\|x\| \to \infty} \|\Omega(x)\| / \|x\| = 0.$$

Для того чтобы при данном $y \in Y$ уравнение $Tx + \Omega(x) = y$ было разрешимо в пространстве X, необходимо и достаточно, чтобы $y \in \{\operatorname{Ker} T^*\}^\perp$.

Результат, аналогичный теореме 1, имеет место и для нелинейного уравнения, сопряженного в некотором смысле уравнению $Tx + \Omega(x) = y$. Сформулируем его.

Теорема 2. *Пусть $T\colon X \to Y$ — определенный во всем X линейный ограниченный оператор. Пусть сопряженный оператор T^* имеет замкнутую в X^* область значений и его ядро $\operatorname{Ker} T^*$ конечномерно. Пусть $\tilde{\Omega}\colon Y^* \to X^*$ — определенный во всем пространстве Y^* вполне непрерывный*

* Т. е. непрерывен и переводит ограниченные множества в компактные.

оператор, обладающий свойствами

$$а') \ \tilde{\Omega}(z) \in \{\operatorname{Ker} T\}^{\perp} \ \forall z \in Y^*; \quad б') \lim_{\|z\| \to \infty} \|\tilde{\Omega}(z)\| / \|z\| = 0.$$

Для того чтобы при данном $w \in X^*$ уравнение $T^*v + \tilde{\Omega}(v) = w$ было разрешимо в пространстве Y^*, необходимо и достаточно, чтобы $w \in \{\operatorname{Ker} T\}^{\perp}$.

В частности, если уравнение $T^*v = \theta$ имеет единственное решение $v = \theta$, то условие а) теоремы 1 перестает быть ограничением, и при выполнении остальных требований теоремы 1 уравнение $Tx + \Omega(x) = y$ разрешимо при всех $y \in Y$. Аналогичное замечание имеет место для теоремы 2.

Переходим к уравнениям с замкнутыми операторами, определенными на линейном всюду плотном в X множестве $D(T)$.

Определение 1 (см. [2]). Говорят, что замкнутый линейный оператор T: $D(T) \to Y$ допускает регуляризацию, если существует определенный во всем Y линейный ограниченный оператор B: $Y \to X$ такой, что $BT = I + L$, где I — тождественный, L — вполне непрерывный операторы в X.

Теорема 3. *Пусть $T: D(T) \to Y$ — линейный замкнутый оператор, допускающий регуляризацию. Пусть Ω: $X \to Y$ — определенный во всем X нелинейный вполне непрерывный оператор, обладающий свойствами*

$$а) \ \Omega(x) \in \{\operatorname{Ker} T^*\}^{\perp} \ \forall x \in X; \quad б) \lim_{\|x\| \to \infty} \|\Omega(x)\| / \|x\| = 0.$$

Для того чтобы при данном $y \in Y$ уравнение $Tx + \Omega(x) = y$ было разрешимо в пространстве X, необходимо и достаточно, чтобы $y \in \{\operatorname{Ker} T^*\}^{\perp}$.

Доказательство сформулированных теорем использует принцип Шаудера — Тихонова и полученную в работе [2] лемму о нормальной разрешимости квазилинейных систем алгебраических уравнений.

2. Пусть B: $X \to X$ — определенный во всем X линейный вполне непрерывный оператор, X_1 — подпространство всех решений уравнения $x = Bx$, лежащих в X, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — базис в X_1. Хорошо известно, что существует система линейных функционалов $\psi_1, \ldots, \psi_n \in X^*$, биортогональная системе элементов $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Для любого $u \in X$ положим $P_2u = u - \sum_{k=1}^{n} (\psi_k, u)\varphi_k$. Известно, что множество $R = \{v: v = x - Bx, x \in X\} = \{v: v = P_2x - BP_2x, x \in X\}$ замкнуто в X. Введем оператор

$$K(x) = x - Bx - \Omega(P_2x) = P_2x - BP_2x - \Omega(P_2x). \qquad (1)$$

Теорема 4. *Пусть B: $X \to X$ — определенный во всем X линейный вполне непрерывный оператор. Пусть Ω: $X \to X$ — определенный во всем X вполне непрерывный оператор, обладающий свойством*

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \|\Omega(x)\| / \|x\| = 0.$$

Тогда область значений оператора K есть замкнутое множество в X.

Ниже знаком $\rightharpoonup$ обозначается слабая сходимость. Напомним известные определения. Оператор T: $X \to X$ называется слабо непрерывным в X, если для любой последовательности $x_n \in X$ из того, что $x_n \rightharpoonup x_0$ следует $T(x_n) \rightharpoonup T(x_0)$. Множество $M \subset X$ называется слабо замкнутым, если для любой последовательности $y_n \in M$ из того, что $y_n \rightharpoonup y_0$, $y_0 \in X$, следует, что $y_0 \in M$.

Теорема 5. *Пусть X — рефлексивное банахово пространство, B: $X \to X$ — определенный во всем X линейный вполне непрерывный оператор. Пусть $\Omega: X \to X$ — определенный во всем X слабо непрерывный оператор, обладающий свойством $\lim_{\|x\| \to \infty} \|\Omega(x)\| / \|x\| = 0$. Тогда область значений оператора K есть слабо замкнутое множество.*

3. Рассмотрим некоторые приложения полученных результатов. Пусть P — ограниченная область n-мерного эвклидова пространства R^n с кусочно-гладкой границей Γ. Точки из P обозначим через $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\int\limits_P f(x)\,dx$ есть интеграл Лебега. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — целочисленный мультииндекс дифференцирования, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Обозначения $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$, $D_i = \partial/\partial x_i$ имеют обычный смысл. Пусть

$$(u, v) = \int\limits_P u(x)\, v(x)\, dx, \;\; u, v \in L_2(P), \; (u, v)_m = \sum_{|\gamma| \leqslant m} (D^\gamma u, D^\gamma v).$$

Форма $(u, v)_m$ определяет скалярное произведение на множестве $C_0^\infty(P)$ бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в P. Здесь целое число $m \geqslant 1$. Замыкание множества $C_0^\infty(P)$ в метрике $\|u\|_m = \sqrt{(u, u)_m}$ приводит к пространству С. Л. Соболева $\mathring{W}_2^m(P) = \mathring{W}_2^m$. В области P рассмотрим первую краевую задачу для нелинейного уравнения с частными производными порядка $2m$

$$\sum_{|\alpha|, |\beta| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_{\alpha\beta}(x) D^\beta u) =$$
$$= \sum_{|\gamma| \leqslant m-1} (-1)^{|\gamma|} D^\gamma T_\gamma(x, u, \ldots, D^{m-1} u) + h(x), \tag{2}$$
$$D^\omega u|_\Gamma = 0, \quad |\omega| \leqslant m - 1. \tag{3}$$

От входящих в уравнение функций потребуем, чтобы они удовлетворяли следующим ограничениям.

Условие I. При всех $|\alpha| \leqslant m$, $|\beta| \leqslant m$ функции $a_{\alpha\beta}(x)$ непрерывны на $\bar{P}$, $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$ и существует число $c_2 > 0$ такое, что $\sum\limits_{|\alpha|, |\beta| \leqslant m} (a_{\alpha\beta}(x) D^\beta u, D^\alpha u) \geqslant c_2 \|u\|_m^2 \;\; \forall u \in \mathring{W}_2^m$.

Условие II. Все функции T_γ, $|\gamma| \leqslant m - 1$, вообще нелинейные, определены при любых $x \in \bar{P}$ и остальных аргументах из интервала $(-\infty, \infty)$. Функции T_γ непрерывны по всем своим аргументам и удовлетворяют неравенствам

$$\Big| T_\gamma(x, u, \ldots, D^{m-1} u) - \sum_{|\delta| \leqslant m-1} b_{\gamma\delta}(x) D^\delta u \Big| \leqslant$$
$$\leqslant c_\gamma + d_\gamma \sum_{|\varepsilon| \leqslant m-1} |D^\varepsilon u|^{\mu_{\varepsilon\gamma}}, \; |\gamma| \leqslant m - 1,$$

где c_γ, d_γ, $\mu_{\varepsilon\gamma}$ — постоянные числа, $c_\gamma > 0$, $d_\gamma > 0$, $0 < \mu_{\varepsilon\gamma} < 1$ при $|\gamma|$, $|\varepsilon| \leqslant m - 1$, все $b_{\gamma\delta}(x)$ — непрерывные функции на $\bar{P}$.

Наряду с нелинейной краевой задачей (2)—(3) рассмотрим в области P линейную краевую задачу

$$\sum_{|\alpha|, |\beta| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_{\alpha\beta}(x) D^\beta u) = \sum_{|\delta|, |\gamma| \leqslant m-1} (-1)^{|\gamma|} D^\gamma (b_{\gamma\delta}(x) D^\delta u), \tag{4}$$
$$D^\omega u|_\Gamma = 0, \quad |\omega| \leqslant m - 1. \tag{5}$$

Здесь функции $a_{\alpha\beta}$, $b_{\gamma\delta}$ те же, что и в условиях I, II. Пусть $h \in L_2(P)$.

Как обычно, функцию $\tilde{u} \in \mathring{W}_2^m$ ($\tilde{\tilde{u}} \in \mathring{W}_2^m$) назовем обобщенным решением задачи (2)—(3) (соответственно задачи (4)—(5)), если для всех $v \in \mathring{W}_2^m$ имеет место интегральное тождество

$$\sum_{|\alpha|, |\beta| \leqslant m} (a_{\alpha\beta}(x)\, D^\beta \tilde{u}, D^\alpha v) = \sum_{|\gamma| \leqslant m-1} (T_\gamma(x, \tilde{u}, \ldots, D^{m-1} \tilde{u}), D^\gamma v) + (h, v)$$

(соответственно

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m}(a_{\alpha\beta}(x)D^{\beta}\tilde{\tilde{u}}, D^{\alpha}v)=\sum_{|\gamma|,|\delta|\leqslant m-1}(b_{\gamma\delta}(x)D^{\delta}\tilde{\tilde{u}}, D^{\gamma}v)).$$

Известно, что подпространство X_1 всех обобщенных решений линейной задачи (4) — (5) конечномерно. Пусть $\psi_1, \ldots, \psi_k$ — базис в X_1.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия* I, II *и пусть* $b_{\gamma\delta}=b_{\delta\gamma}$ *для всех* $|\gamma|$, $|\delta|\leqslant m-1$. *Пусть для всех* $u\in \overset{\circ}{W}{}_2^m$ *имеют место равенства*

$$\sum_{|\gamma|\leqslant m-1}(T_\gamma(x, u, \ldots, D^{m-1}u)-\sum_{|\delta|\leqslant m-1}b_{\gamma\delta}(x)D^{\delta}u, D^{\gamma}\psi_i)=0,\quad i=1,\ldots,k.$$

Для того чтобы при $h\in L_2(P)$ *нелинейная задача* (2) — (3) *имела обобщенное решение, необходимо и достаточно выполнение системы равенств* $(h, \psi_i)=0, i=1,\ldots,k$.

Теорема 7. *Пусть выполнены условия* I, II *и пусть линейная задача* (4) — (5) *имеет единственное обобщенное решение* $u=\theta$. *Тогда нелинейная задача* (2) — (3) *разрешима в обобщенном смысле при любом* $h\in L_2(P)$.

Отметим, что легко получить аналог теоремы 6 без предположения $b_{\gamma\delta}=b_{\delta\gamma}$. Точно так же можно ослабить ряд требований в условиях I, II. Обобщение теорем 6, 7 на системы уравнений не представляет труда.

Всесоюзный заочный электротехнический
институт связи
Москва

Поступило
4 XII 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] К. Иосида, Функциональный анализ, 1967. [2] С. Г. Михлин, Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, 1962. [3] Р. И. Качуровский, ДАН, 192, № 5 (1970). [4] A. N. Tikhonov, Math. Ann., 111, 767 (1935).