Доклады Академии наук СССР
1970. Том 195, № 3

УДК 519.52

МАТЕМАТИКА

В. А. ЛЮБЕЦКИЙ

ИЗ СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕИЗМЕРИМОГО МНОЖЕСТВА ТИПА A_2 ВЫТЕКАЕТ СУЩЕСТВОВАНИЕ НЕСЧЕТНОГО МНОЖЕСТВА, НЕ СОДЕРЖАЩЕГО СОВЕРШЕННОГО ПОДМНОЖЕСТВА ТИПА CA

(Представлено академиком П. С. Новиковым 27 IV 1970)

Известны следующие проблемы дескриптивной теории множеств:

верно ли утверждение (I): «существует несчетное множество типа CA, не содержащее совершенного подмножества»;

верно ли утверждение (II): «существует множество типа B_2, не измеримое по Лебегу».

Постановка этих проблем была уточнена в терминах аксиоматической теории множеств. Именно, был поставлен вопрос о выводимости утверждений (I) и (II) или их отрицаний в той или иной аксиоматической теории — например, в теории Цермело — Френкеля (обозначают ZF) или в теории Гёделя — Бернайса (обозначают GB или Σ). Заметим, что в силу общих метатеорем аксиоматической теории множеств (см. ([1]), стр. 149), выводимость в ZF утверждений (I), (II) или их отрицаний равносильна выводимости этих же предложений в GB.

П. С. Новиков ([2]) доказал, что отрицания предложений (I) и (II) не могут быть выведены в GB. В абстракте ([3]) Соловай объявил, не приводя доказательства, о существовании модели ZF, в которой, в частности, ложны утверждения (I) и (II). Автор настоящей заметки также построил модель ZF, в которой, в частности, ложно утверждение (I) и доложил этот результат на Всесоюзном симпозиуме по математической логике (Алма-Ата, 2—7 июня 1969 г., см. теорему 3а) в тезисах названного симпозиума ([4])). На симпозиуме была доложена также следующая теорема (не включенная, однако, в тезисы ([4])):

Теорема 1. *Существует модель теории ZF, в которой* (II) *ложно, а* (I) *истинно.*

После ряда самых различных предложений, оказавшихся неразрешимыми средствами обычной теории множеств (например, предложения (I) и (II), предложение, что из (I) следует (II), и т. д.), кажется несколько удивительным, что один классический вопрос дескриптивной теории множеств может быть решен в рамках обычной наивной теории множеств без всяких дополнительных предположений.

Теорема 2. *Выводимо в ZF, что из существования неизмеримого множества типа A_2 следует существование несчетного множества типа CA, не содержащего совершенного подмножества.*

Используя такой критерий (см. ([4,6])): $ZF \vdash \exists u(L^+(u)$ — несчетно $\equiv (I))$, теорему 2 легко вывести из следующего более общего утверждения.

Теорема 2′.

$$ZF \vdash \exists u\, \exists \varphi\, (\varphi \in \Sigma_2^1(u)\, f\{x \mid Ист\, \varphi(x)\} - неизмеримо) \equiv R(u) - не\ меры\ 0).$$

В формулировке теоремы 2′ использованы следующие сокращения: $\varphi \in \Sigma_2^1(u) \cup \Pi_2^1(u)$ означает, что формула φ содержит только два квантора по действительным числам (один квантор существования и один квантор всеобщности) и любое число кванторов по натуральным числам, навешенным на предикат, разрешимый относительно действительного числа u (точное определение см. ([5])); $L^+(u)$ это терм, выдающий по действительному числу u множество всех действительных чисел, конструктивных (по Гёделю) относительно числа u. Ист φ это формула ZF, имеющая следующий смысл: если формула φ содержит только кванторы по множествам действительных или натуральных чисел, то Ист φ означает, что формула φ истинна. Легко видеть, что для всякой φ, $\varphi \in \Sigma_2^1(u) \cup \Pi_2^1(u)$, множество $\{x \mid \text{Ист}\,\varphi(x)\}$ типа A_2 или CA_2. И, наоборот, всякое множество действительных чисел типа A_2 или CA_2 может быть описано в этом смысле формулой φ, $\varphi \in \Sigma_2^1(u) \cup \Pi_2^1(u)$. $\bar{R}(u)$ это терм, выдающий по числу u множество неслучайных относительно u действительных чисел.

Когда ставились проблемы, сформулированные в начале настоящей заметки, то сами утверждения (I) и (II) некоторыми авторами (и, прежде всего, Н. Н. Лузиным: см. ([7]), стр. 553—556, 565) понимались иначе, чем утверждения о чистом существовании. Речь шла об «эффективном существовании», т. е. о том, можно ли эффективно задать тот или иной объект, даже если допустить, что такой объект существует.

Теорема 3. *Не существует терма T со свободными переменными $x_1 \dots x_n$, для которого в $ZF + (I)$ доказуемо утверждение: «$\exists\alpha_1 \dots \exists\alpha_n$ ($\alpha_1 \dots \alpha_n$ суть ординалы $\& T(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ есть A-множество, дополнение к которому несчетно и не содержит совершенного ядра)».*

Дадим набросок доказательства теоремы 3. Прежде всего по терму T_1 типа Π_1^1 можно построить такой терм T, который задает решето (см. ([7]), стр. 162), не просеивающее в точности множество $\{x \mid T_1(x)\}$. Допустим теперь противное: пусть терм $T(\alpha_1 \dots \alpha_n)$, где $\alpha_1 \dots \alpha_n$ — произвольные ординалы, задает несчетное CA-множество, не содержащее совершенного ядра, точнее $\underset{ZF}{\vdash} \exists\alpha_1 \dots \exists\alpha_n$ ($\alpha_1 \dots \alpha_n$ суть ординалы $\& T(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ есть несчетное CA-множество без совершенного ядра). В частности, выводимо в ZF, что множество $T(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ есть объединение несчетного числа не пересекающихся конституант, каждая из которых счетна. П. С. Новиков указал эффективный способ выбирать из CA-множества, заданного решетом, точку (см. ([7]), стр. 617). С помощью этого способа по терму $T(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ можно построить другой терм $T'(\alpha_1 \dots \alpha_n)$, обладающий следующим свойством: для всякого ординала α такого, что α-я конституанта решета $T(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ не пуста, терм $T'(\alpha_1 \dots \alpha_n \alpha)$ есть действительное число из этой конституанты. Терм $T'(\alpha_1 \dots \alpha_n \alpha)$ задает, следовательно, несчетную вполне упорядоченную последовательность различных действительных чисел, причем это обстоятельство выводимо в ZF, т. е. истинно во всякой модели ZF. Рассмотрим модель ZF, описанную в книге ([1]), стр. 267, взяв в качестве фигурирующего там α первый несчетный ординал ω_1^M минимальной модели M.

Будем обозначать эту модель N_h. Можно показать, что в N_h справедливо предложение (I). Терм T', релятивизованный к N_h, дает несчетную последовательность действительных чисел в N_h, определимую этим термом $(T')_N$. С другой стороны, используя понятие пермутации, введенное А. Леви в ([8]) в связи с иной моделью, можно показать, что всякая определимая в N_h последовательность действительных чисел счетна (в N_h). Это дает противоречие.

Следствие. *Не существует терма T без свободных переменных, для которого в $ZF + $ (I) доказуемо утверждение: «T есть A-множество, дополнение к которому несчетно и не содержит совершенного ядра».*

Теорема 4. *Не существует терма T со свободными переменными $x_1 \dots x_n$, для которого в $ZF + $ (I) $+$ (II) доказуемо утверждение: «$\exists\alpha_1 \dots \exists\alpha_n$ ($\alpha_1 \dots \alpha_n$ суть ординалы $\& T(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ есть неизмеримое множество».*

Следствие. *Не существует терма T, без свободных переменных, для которого доказуемо в ZF + (I) + (II) утверждение: «T есть неизмеримое множество».*

Хочу поблагодарить моего руководителя В. А. Успенского, поставившего передо мной ряд интересных задач (на часть из них здесь даны ответы) и постоянно помогавшего мне в работе, и А. Г. Драгалина за многократные обсуждения этих теорем и советы по улучшению их доказательств.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
18 III 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. Дж. Коэн, Теория множеств и континуум — гипотеза, 1969. [2] П. С. Новиков, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова, 38, 279 (1951). [3] R. Solovay, Abstract 65T — 62, Notices Am. Math. Soc., 12, 217 (1965). [4] А. Г. Драгалин, В. А. Любецкий, Тез. докл. Всесоюзн. симпозиума по математической логике, Алма-Ата, 1969. [5] J. W. Addison, Fund. Math., 46, 337 (1959). [6] В. А. Любецкий, ДАН, 182, № 4, 758 (1968). [7] Н. И. Лузин, Собр. соч., 2, 1958. [8] A. Levy, Proc. of the 1964 Intern. Congr., Amsterdam, 1966, p. 127.