

А. А. БОВДИ, С. В. МИХОВСКИ

ИДЕМПОТЕНТЫ СКРЕЩЕННЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 21 IV 1970)

Пусть G — произвольная группа, а K — ассоциативное кольцо с единицей. Предположим, что заданы однозначное отображение σ группы G в группу автоморфизмов кольца K и семейство $\rho = \{\rho_{g,h} | g, h \in G\}$ обратимых элементов кольца K , причем удовлетворяются соотношения:

$$\rho_{g_1, g_2 g_3} \rho_{g_2, g_3} = \rho_{g_1 g_2, g_3} \rho_{g_1, g_2}^{\sigma};$$

$$\alpha_{g_1, g_2}^{\sigma} \alpha_{g_2, g_3}^{\sigma} = \rho_{g_1, g_2}^{-1} \alpha_{g_1, g_2}^{\sigma(g_3)} \cdot \rho_{g_1, g_2}$$

для всех $\alpha \in K$ и $g_1, g_2, g_3 \in G$. Семейство ρ называется системой факторов.

Поставим в соответствие каждому элементу $g \in G$ символ t_g и рассмотрим множество W всевозможных сумм вида

$$\sum_{g \in G} t_g \alpha_g \quad (\alpha_g \in K),$$

в каждой из которых лишь конечное число коэффициентов α_g отлично от нуля. Равенство

$$\sum_{g \in G} t_g \alpha_g = \sum_{g \in G} t_g \beta_g$$

имеет место тогда и только тогда, когда $\alpha_g = \beta_g$ для всех $g \in G$. Множество W превращается в ассоциативное кольцо, если операции сложения и умножения определены следующим образом:

$$\sum_{g \in G} t_g \alpha_g + \sum_{g \in G} t_g \beta_g = \sum_{g \in G} t_g (\alpha_g + \beta_g);$$

$$t_g t_h = t_{gh} \rho_{g, h};$$

$$\alpha t_g = t_g \alpha^{\sigma} \quad (\alpha \in K),$$

а для произвольных элементов произведение определяется на основании закона дистрибутивности. Это кольцо называется скрещенным произведением группы G и кольца K при системе факторов ρ и отображении σ и обозначается через (G, K, ρ, σ) . Ряд свойств этого кольца можно найти в работах ^(1, 2).

Если σ отображает группу G на единичный автоморфизм кольца K , то скрещенное произведение (G, K, ρ, σ) называется скрещенным групповым кольцом и его будем обозначать через (G, K, ρ) . Кроме того, если система факторов ρ единична, т. е. $\rho_{g, h} = 1$ для всех $g, h \in G$, то скрещенное произведение является групповым кольцом и его будем обозначать через KG .

Пусть $A(K)$ — группа автоморфизмов, а $B(K)$ — группа внутренних автоморфизмов кольца K . Ядром отображения σ называется ядро сквозного отображения

$$G \rightarrow A(K) \rightarrow A(K) / B(K).$$

Если $x = \sum_{i=1}^n t_{g_i} a_i$ ($a_i \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$) — элемент кольца

(G, K, ρ, σ) , то подгруппа L_x группы G , порожденная элементами $g_1, g_2, \dots, g_n$, называется опорной подгруппой элемента x .

В статье исследуется строение опорных подгрупп идемпотентов скрещенного произведения (G, K, ρ, σ) .

Теорема 1. Для произвольного скрещенного произведения (G, K, ρ, σ) группы G и кольца K опорная подгруппа каждого центрального идемпотента кольца (G, K, ρ, σ) является конечной нормальной подгруппой группы G .

Предположение о конечности опорных подгрупп центральных идемпотентов выдвинули Рудин и Шнейдер в ⁽²⁾, где методами теории банаховых алгебр в групповых алгебрах над полем комплексных чисел изучается строение опорных подгрупп таких идемпотентов.

Для некоторых классов колец K теорема 1 допускает следующее усиление.

Теорема 2. Центральный идемпотент скрещенного произведения (G, K, ρ, σ) группы G и коммутативного кольца K без делителей нуля (или K — произвольное простое кольцо) имеет конечную опорную подгруппу, принадлежащую ядру отображения σ , и некоторый простой делитель порядка опорной подгруппы обратим в кольце K , если $\text{char } K = 0$.

Если K — кольцо характеристики p , то из теоремы 2 следует, в силу теоремы Пассмана — Осима ⁽¹⁾, что в записи каждого центрального идемпотента KG участвуют только такие элементы группы G , порядок которых не делится на p .

Кольцо K называется бирегулярным, если каждый главный двусторонний идеал в кольце K порождается центральным идемпотентом.

Если G — произвольная группа, то известно, что совокупность всех элементов конечного порядка, обладающих конечным числом сопряженных в группе G , является нормальной подгруппой группы G , которую обозначим через G^+ .

Теорема 3. Пусть KG — групповое кольцо произвольной группы G над любым бирегулярным кольцом K , в котором порядок каждого элемента $g \in G^+$ обратим. Кольцо KG разлагается в прямую сумму неразложимых двусторонних идеалов тогда и только тогда, когда группа G^+ конечна и кольцо K удовлетворяет условию максимальности для двусторонних идеалов.

Теорема 4. Групповое кольцо KG разлагается в прямую сумму минимальных двусторонних идеалов тогда и только тогда, когда

1. Группа G конечна и ее порядок обратим в K .

2. Кольцо K разлагается в прямую сумму минимальных двусторонних идеалов.

Теорема 5. Групповое кольцо произвольной группы G над коммутативным кольцом K является бирегулярным тогда и только тогда, когда G — локально нормальная группа, K — бирегулярно и порядок каждого элемента из группы G обратим в кольце K .

Теорема 5 остается справедливой, если вместо условия коммутативности K потребовать условия максимальности для двусторонних идеалов.

Исследуем строение скрещенных произведений, содержащих идемпотенты только с конечными опорными подгруппами. Следствия 1 и 2 обобщают соответственно теоремы 4.3 и 3.4 Рудина и Шнейдера из ⁽²⁾.

Пусть (G, K, ρ, σ) — произвольное скрещенное произведение группы G и кольца K . Обозначим через $M(G, K)$ совокупность всех таких элементов g конечного порядка группы G , что

1. Порядок элемента g обратим в K .

2. Существует такой обратимый элемент $e \in K$, что g и $t_g e$ имеют одинаковые порядки.

Если g имеет порядок n , то $(t_g e)^n = t_1 \rho_{1,1}^{-1}$ тогда и только тогда, когда

$$\rho_g^{-1} = \varepsilon(g\sigma)^{n-1} \varepsilon(g\sigma)^{n-2} \dots \varepsilon g \sigma \varepsilon \quad (t_g^n = t_1 \rho_{1,1}^{-1} \rho_g),$$

т. е. ρ_g является нормой элемента из K в циклическом подкольце $(\{g\}, K, \rho, \sigma)$.

Теорема 6. Пусть в кольце (G, K, ρ, σ) все идемпотенты имеют конечные опорные подгруппы. Тогда множество $M(G, K)$ порождает локально конечную нормальную подгруппу группы G . Более того, если существует элемент $g \in M(G, K)$, который порождает инвариантную циклическую подгруппу группы G , то G — локально конечная группа.

Следствие 1. Пусть G — не локально конечная группа и групповое кольцо KG имеет идемпотенты только с конечными опорными подгруппами, а L — подгруппа, порожденная множеством $M(G, K)$. Тогда

1. Каждая подгруппа группы L нормальна в G .
2. Если для каждого n , являющегося порядком элемента из L , существует в кольце K обратимый элемент порядка n , то L принадлежит центру группы G .

3. Если K — поле и L — гамильтонова группа, то алгебра KL не содержит нетривиальных нильпотентных элементов.

Теорема 7. Пусть (G, K, ρ, σ) — скрещенное произведение правоупорядоченной группы G и коммутативного нётерова кольца K . Если каждый первичный идеал кольца K σ -допустимый, то любой идемпотент кольца (G, K, ρ, σ) имеет тривиальную опорную подгруппу.

Теорема 8. Пусть в центре группы G содержится такая конечно порожденная подгруппа H , что G/H — правоупорядоченная группа, а K — коммутативное нётерово кольцо. Если $\rho_{g,h} = \rho_{h,g}$ для любых двух перестановочных элементов g и h группы G , то все идемпотенты кольца (G, K, ρ) имеют конечные опорные подгруппы.

Следствие 2. Пусть в центре группы G содержится такая конечно порожденная подгруппа H , что G/H — правоупорядоченная группа, а K — коммутативное кольцо. Тогда каждый идемпотент группового кольца KG имеет конечную опорную подгруппу.

Задачу существования только тривиальных идемпотентов в групповых кольцах впервые исследовал С. Д. Берман. Он доказал, что целочисленное групповое кольцо ZG конечной группы G содержит только тривиальные идемпотенты. Отсюда непосредственно следует, что таким свойством обладает целочисленное групповое кольцо группы, аппроксимируемой конечными группами. Поэтому естественно предположить, что если групповое кольцо KG произвольной группы G над коммутативной областью целостности обладает нетривиальным идемпотентом, то порядок некоторого элемента из группы G обратим в K . Справедливость предположения подтверждает результат Колемана⁽⁵⁾ и следующее утверждение:

Теорема 9. Групповое кольцо KG локально нильпотентной группы G над коммутативной областью целостности K содержит нетривиальные идемпотенты тогда и только тогда, когда в группе G существует такой элемент g простого порядка p , что элемент p обратим в кольце K .

Ужгородский государственный
университет

Поступило
26 III 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. А. Бовди, Сибирск. матем. журн., 4, № 3, 481 (1963). ² А. А. Бовди, Сибирск. матем. журн., 5, № 2, 465 (1964). ³ W. Rudin, H. Schneider, Duke Math. J., 31, № 4, 585 (1964). ⁴ D. S. Passman, Proc. Am. Math. Soc., 22, № 2, 555 (1969). ⁵ D. B. Coleman, Proc. Am. Math. Soc., 17, № 4, 962 (1966).