Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 3

УДК 519.21 *МАТЕМАТИКА*

В. А. МАЛЫШЕВ

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДАНИЯ И ОБОБЩЕННЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 2 VI 1970)

Рассмотрим однородную цепь Маркова с дискретным временем, множеством состояний которой является множество $\{\alpha=(i, j): i, j \geqslant 0$ целые$\}$. Пусть $p_{\alpha\beta}$ — переходные вероятности. При этом, если $\alpha=(k, l)$, $\beta=(k+i, l+j)$, то $p_{\alpha\beta}=p_{ij}$ при $k, l \geqslant 1$; $p_{\alpha\beta}=p_{ij}'$ при $k\geqslant 1$, $l=0$; $p_{\alpha\beta}=p_{ij}''$ при $k=0$, $l\geqslant 1$ и $p_{\alpha\beta}=p_{ij}^0$ при $k=l=0$. При этом мы везде считаем, что i, j равны нулю, если либо $|i|\geqslant 2$, либо $|j|\geqslant 2$, причем, конечно, у p_{ij}' индекс $j\geqslant 0$, у p_{ij}'' индекс $i \geqslant 0$ и т. д.

Случайное блуждание будет предполагаться невырожденным [1] и имеющим единственный существенный класс состояний. Если стационарное распределение существует, то обозначим стационарные вероятности $\pi_\alpha=\pi_{ij}$.

Данная работа является развитием работы [1]. В ней методами теории Галуа были исследованы случаи, когда производящие функции стационарных вероятностей рациональны, и, в частности, показано, что рациональность имеет место лишь на некоторых алгебраических подмногообразиях пространства параметров p_{ij}, p_{ij}', p_{ij}'', p_{ij}^0. В данной работе находится интегральное представление для стационарных вероятностей в общем случае и, кроме того, условия существования стационарного распределения.

Введем следующие производящие функции стационарных вероятностей внутри четверти плоскости и на границах, определенные, по крайней мере, при $|x|, |y| \leqslant 1$:

$$\pi(x, y)=\sum_{i, j=1}^{\infty} \pi_{ij} x^{i-1} y^{j-1}, \quad \pi(x)=\sum_{i=1}^{\infty} \pi_{i0} x^{i-1}, \quad \tilde{\pi}(y)=\sum_{j=1}^{\infty} \pi_{0j} y^{j-1}.$$

Если найдены $\pi(x)$, $\tilde{\pi}(y)$ и π_{00}, то $\pi(x, y)$ выражается через них следующим образом:

$$\pi(x, y)=[q(x, y)\pi(x)+\tilde{q}(x, y)\tilde{\pi}(y)+\pi_{00}q_0(x, y)]/Q(x, y), \tag{1}$$

где многочлены Q, q, $\tilde{q}$ и q_0 являются производящими функциями скачков (несколько измененными)

$$Q(x, y)=xy\Big(1-\sum_{i, j=-1}^{1} p_{ij}x^i y^j\Big), \quad q(x, y)=x\Big(\sum_{i, j=-1}^{1} p_{ij}' x^i y^j-1\Big),$$

$$\tilde{q}(x, y)=y\Big(\sum_{i, j=-1}^{1} p_{ij}'' x^i y^j-1\Big), \quad q_0(x, y)=\sum p_{ij}^0 x^i y^j-1.$$

Существование стационарного распределения определяется средними скачками за один шаг в направлении каждой из осей внутри и на границах четверти плоскости:

$$M_x=\sum_j p_{1j}-\sum_j p_{-1, j}, \quad M_y=\sum_i p_{i1}-\sum_i p_{i, -1},$$

$$M'_x = \sum_j p'_{1j} - \sum_j p'_{-1,\,j}, \quad M'_y = \sum_i p'_{i1} - \sum_i p'_{i,\,-1}$$

и т. д. Далее для сокращения формулировок предполагается, что $M_x < 0$, $M_y < 0$.

Теорема 1. *Стационарное распределение существует тогда и только тогда, когда*

$$M_x M_y' - M_y M_x' < 0, \quad M_y M_x'' - M_x M_y'' < 0. \tag{2}$$

Далее мы говорим только о функции $\pi(x)$; формулировки для $\tilde{\pi}(y)$ получаются симметричным образом, а $\pi(x, y)$ рационально выражается через них по формуле (1).

Предполагается, что условия (2) выполнены.

Лемма 1. *Алгебраическая функция $y(x)$, определяемая уравнением*

$$Q(x, y) = 0, \tag{3}$$

имеет точно две точки ветвления, расположенные строго вне единичного круга. Эти точки ветвления вещественны, причем наименьшая из них по модулю (обозначаемая далее x_3), всегда положительна. Две другие точки ветвления, также вещественные, лежат в единичном круге.

Аналитическое поведение решения. Многие интересные свойства (например, асимптотика) определяются возможностью аналитического продолжения соответствующих производящих функций. Оказывается, что $\pi(x)$, априори аналитическая в единичном круге, мероморфно продолжается в круг $|x| < x_3$, а далее в нерациональном случае начинает ветвиться, причем все точки ветвления имеют алгебраический характер и их бесконечное число. Точная формулировка дается в теореме 2.

Обозначим через S риманову поверхность поля алгебраических функций, определенного уравнением (3), а через Ω — ее универсальную накрывающую с некоторым фиксированным накрытием $\lambda\colon \Omega \to S$. Имеем следующую диаграмму накрытий

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & \mathbf{P} \\ \Omega \arrow[r, "\lambda"] & S \arrow[ur, "h_1"] \arrow[dr, "h_2"'] & \\ & & \mathbf{P}. \end{tikzcd}$$

Здесь h_1 и h_2 — естественные накрытия римановой поверхностью S комплексной проективной прямой $\mathbf{P}$, соответствующие реализации S как римановой поверхности алгебраических функций $y(x)$ и $x(y)$ соответственно.

Пусть D и $\tilde{D}$ — области на S, где соответственно $|x(s)| < 1$ и $|y(s)| < 1$, $s \in S$.

Лемма 2. *Риманова поверхность S всегда имеет род 1. Граница D состоит из двух простых аналитических непересекающихся замкнутых кривых: Γ_0, где $|y(s)| \leqslant 1$, и Γ_1, где $|y(s)| \geqslant 1$. Аналогичное утверждение верно для границы $\tilde{\Gamma}_0 \cup \tilde{\Gamma}_1$ области $\tilde{D}$. Кривые Γ_0, Γ_1, $\tilde{\Gamma}_0$, $\tilde{\Gamma}_1$ гомотопны, причем их класс гомологий является одним из элементов нормального базиса гомологий на торе. При этом пересечение $G = D \cap \tilde{D}$ непусто и ограничено кривыми Γ_0 и $\tilde{\Gamma}_0$.*

Риманова поверхность S является фактором Ω по решетке периодов $\{n\omega_1 + m\omega_2\}$ (далее будет предполагаться без ущерба для общности, что $\lambda([0, \omega_1])$ гомологична Γ_0). Зафиксируем одну из связных компонент Δ_0 прообраза $\lambda^{-1}(D \cup \tilde{D})$. Далее прообразы кривых и областей из S на Δ_0 будут обозначаться теми буквами, что и на $D \cup \tilde{D}$ (так $\Gamma_0 = \Delta_0 \cap \lambda^{-1}(\Gamma_0)$). Очевидным образом функции $\pi(x)$ и $\tilde{\pi}(y)$ могут быть подняты соответственно на области $D \subset \Delta_0$ и $\tilde{D} \subset \Delta_0$. При этом, например, $\pi(\omega) = \pi(h_1 \lambda \omega)$.

Теорема 2. *Функции $\pi(\omega)$ и $\tilde{\pi}(\omega)$, априори аналитические в областях $D \subset \Delta_0$ и $\tilde{D} \subset \Delta_0$ соответственно, могут быть мероморфно продолже-*

ны на всю универсальную накрывающую Ω, причем они имеют на Ω период ω_1.

Таким образом, риманова поверхность функций $\pi(x)$ и $\tilde{\pi}(y)$ топологически представляет собой бесконечный цилиндр, т. е. фактор $\mathbf{C}$ по $\{n\omega_1\}$.

Интегральное представление решения. Функции x, y, $q(x, y)$, $\tilde{q}(x, y)$, $q_0(x, y)$, поднятые на Ω, являются эллиптическими функциями, обозначаемыми далее $x(\omega)$, $y(\omega)$, $q(\omega) = q(x(\omega), y(\omega))$ и т. д. Обзоначим через x_1 и y_1 любые из точек ветвления функций соответственно $y(x)$ и $x(y)$, лежащих в единичном круге, и пусть $a = \lambda^{-1}(h_1^{-1}(x_1)) \cap \cap \Delta_0$, $b = \lambda^{-1}h_2^{-1}(y_1) \cap \Delta_0$ (ввиду теоремы 2 можно предполагать, что все делается по mod ω_1, т. е. в полосе $\Pi = \{\omega\colon \omega = \mu\omega_1 + \nu\omega_2,\ 0 \leqslant \mu < 1,\ \nu < \infty)$. Введем автоморфизмы отражений ξ и η относительно точек a и b соответственно (поднятие автоморфизмов Галуа ([1]) на Ω). $\xi\eta$ есть сдвиг на ω_3 — удвоенное расстояние между a и b. Пусть $\zeta(\omega)$ — ζ-функции Вейерштрасса с периодами ω_1 и ω_3 и началом координат в точке a.

Пусть $l \subset G$ — произвольная замкнутая кривая, гладкая и без самопересечений, гомотопная Γ_0, причем $q \neq 0$ в замыкании области, расположенной между l и Γ_0 на Δ_0, а $\tilde{q} \neq 0$ в замыкании области, расположенной между l и $\tilde{\Gamma}_0$ (кроме конечно точки, где $x = y = 1$).

Лемма 3. *Кривую l, обладающую перечисленными выше свойствами, можно выбрать так, чтобы* $\operatorname*{ind}_l xq / \tilde{q} = 0$.

Пусть $\varkappa$ — группа преобразований Ω, порожденная ξ и η. Введем аналитическую всюду кроме сетки кривых $\varkappa l$, двоякопериодическую с периодами ω_1 и ω_3 функцию

$$\rho(\omega) = \exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_l (\zeta(\omega - \tau) + \zeta(-\omega - \tau)) \ln \frac{x(\tau)\,\tilde{q}(\tau)}{q(\tau)}\, d\tau\right],$$

причем на каждой кривой из $\varkappa l$ определим $\rho(\omega)$ как предельное значение $\rho(\omega)$ слева при обходе в направлении ω_1). Введем обладающую такими же свойствами функцию

$$\chi(\omega) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_l [\zeta(\omega - \tau) + \zeta(-\omega - \tau)]\, \frac{x(\tau)\, q_0(\tau)}{q(\tau)\,\rho(\tau)}\, d\tau.$$

Теорема 3. *В области $\Delta_l \subset D$, являющейся связной компонентой $\Omega \setminus \setminus \{\varkappa l\}$, замыкание которой содержит точку ω_0, где $x = y = 1$, и точку $\xi\omega_0$, имеет место*

$$\pi(\omega) = \rho(\omega)\,[c + \chi(\omega)] / x(\omega), \tag{4}$$

где константа c определяется так, чтобы в точке $x(\omega) = 0$ числитель (4) *обращался в нуль.*

Замечание. В остальных точках $\pi(\omega)$ можно найти, используя теорему 2 и тот факт, что числитель $\Pi(\omega)$ правой части (4) имеет следующие скачки на кривых $\varkappa l$:

$$\Pi_+(\omega) - \frac{\tilde{q}(\omega)}{q(\omega)}\,\Pi_-(\omega) = -\frac{q_0(\omega)}{q(\omega)},\quad \omega \in l \cap \bar{\Delta}_l;$$

$$\Pi_-(\omega) - \frac{\tilde{q}(\xi\omega)}{q(\xi\omega)}\,\Pi_+(\omega) = -\frac{q_0(\xi\omega)}{q(\xi\omega)},\quad \omega \in \xi l \cap \bar{\Delta}_l$$

(здесь Π_+ и Π_- — предельные значения $\Pi(\omega)$ слева и справа соответственно, а скачки на остальных кривых hl, $h \in \varkappa$, находятся из условия двоякопериодичности функции $\Pi(\omega)$). Собственно, сведение к задаче Римана (5) и является основным в доказательстве теоремы 3.

Если $q(\omega) / \tilde{q}(\omega) \equiv \text{const}$, что имеет место, например, для случайного блуждания с косым отражением ([2]), то решение выражается в виде обычного эллиптического интеграла.

Можно получить интегральное представление непосредственно для стационарных вероятностей. Мы сформулируем его здесь на примере блужданий с группой четвертого порядка автоморфизмов S.

Если $Q(x, y) \equiv a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$, то введем абелев дифференциал первого рода на S

$$d\omega = -dx/[2a(x)y + b(x)].$$

Рассмотрим область R, лежащую между Γ_1 и $(\xi_\eta)^2\widetilde{\Gamma}_1 = \widetilde{\Gamma}_1 + 2\omega_3$. Можно считать, что $R \subset S$.

Теорема 4. *Для простого случайного блуждания имеет место*

$$\pi_{mn} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\widetilde{\Gamma}_1} \frac{q}{x^m y^n}[(ff_\delta - 1)\pi(x) + f_\delta\psi + \psi]\,d\omega +$$

$$+\sum_{s\in R} \mathrm{Res}_s\left[\frac{q\pi(x)}{x^m y^n}d\omega\right],$$

где

$$f = \frac{q\widetilde{q}_\eta}{\widetilde{q}\,q_\eta}, \quad \psi = \frac{\widetilde{q}_\eta}{q}\left(\frac{q_0}{\widetilde{q}} - \frac{q_{0\eta}}{\widetilde{q}_\eta}\right),$$

а Res_s *означает вычет в точке s у стоящего в скобках мероморфного дифференциала на S. При этом $\widetilde{\Gamma}_1$ ориентирована так, чтобы Δ при обходе оставалась слева.*

Аналогичное соотношение имеет место и для случайного блуждания с произвольной группой. Если норма $N_{\mathbf{C}_0}{}^{\mathbf{C}}{}_{\varphi}(f) = ff_\delta = 1$, что имеет место, например, для случайного блуждения с косым отражением, то подынтегральное выражение в формуле (5) не содержит $\pi(x)$. Теорема 4 доказывается с помощью теории Лере ([3]) и является основной для получения разного рода асимптотических представлений.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
13 V 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Малышев, УМН, 26, 1 (1971). [2] В. А. Малышев, Тр. Советско-Японского симпозиума по теории вероятностей, Хабаровск, 1969, стр. 176. [3] Ж. Лере, Дифференциальное и интегральное исчисление на комплексном аналитическом многообразии, М., 1961.