

В. Л. МУРСКИЙ

НЕРАСПОЗНАВАЕМЫЕ СВОЙСТВА КОНЕЧНЫХ СИСТЕМ ТОЖДЕСТВЕННЫХ СООТНОШЕНИЙ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 26 VI 1970)

В заметке излагается метод, позволяющий доказывать невозможность алгоритмов для распознавания разнообразных свойств конечных систем тождеств. Все рассматриваемые свойства инвариантны относительно эквивалентности, т. е. индуцированы некоторыми свойствами соответствующих многообразий. Результаты формулируются применительно к классу всех алгебр произвольной фиксированной сигнатуры, у которой сумма «арностей» операций больше единицы (для остальных сигнатур все рассматриваемые далее проблемы разрешимы). Перечислим несколько свойств конечных систем тождеств, для каждого из которых невозможен алгоритм для распознавания по заданной системе Σ , обладает ли Σ рассматриваемым свойством.

а) Σ совместна (т. е. соответствующее многообразие $V(\Sigma)$ нетривиально);

б) всякая система тождеств, содержащая Σ , эквивалентна конечной системе (всякое подмногообразие $V(\Sigma)$ определимо конечным числом тождеств);

в) в многообразии $V(\Sigma)$ проблема слов («проблема тождества») для конечно определенных алгебр разрешима;

г) $V(\Sigma)$ порождается конечной алгеброй (Σ имеет конечную точную модель);

д) Σ эквационально полна ($V(\Sigma)$ минимально).

Этот список без труда можно было бы продолжить.

Доказательство нераспознаваемости этих свойств основано, во-первых, на построениях, аналогичных примененным в ^(1,2) для доказательств нераспознаваемости свойств ассоциативных исчислений, и, во-вторых, на известной ^(3,4) связи между ассоциативными исчислениями и «исчислениями тождеств» от одной переменной (в ⁽³⁾ эта связь использовалась для построения конечных систем тождеств Σ с нерекурсивным множеством тождеств — следствий Σ). Несколько более сложные построения позволяют доказать, например, следующие утверждения (по отношению к которым приведенные результаты должны рассматриваться, по существу, как весьма специальные случаи; это будет видно из приводимого наброска доказательства теоремы 2).

Теорема 1. Пусть P — абстрактное свойство алгебр такое, что: 1) однопредельная алгебра обладает свойством P ; 2) можно указать не тождественно истинную формулу вида

$$\left(\bigvee_{i=1}^m \exists x \exists y (t_{1i} = t_{2i}) \right) \vee \left(\bigvee_{j=1}^n \exists x (t'_{1j} = t'_{2j}) \right),$$

где $m \geq 0$, $n \geq 0$, t_{1i} , t'_{1j} , t'_{2j} — термы от одной переменной x , t_{2i} — термы от y , истинную для всякой алгебры со свойством P . Тогда невозможен алгоритм, распознающий по конечной системе тождеств Σ , всякая ли алгебра соответствующего многообразия $V(\Sigma)$ обладает свойством P .

Следствие. Пусть Σ_0 — система тождеств, хотя бы в одном из которых левая часть отлична от правой. Тогда множество $\{\Sigma \mid \Sigma \vdash \Sigma_0\}$ конечных систем тождеств, из которых выводима Σ_0 , нерекурсивно.

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра, имеющая конечную полную систему тождеств и удовлетворяющая какому-нибудь тождеству вида $x = t$, где терм t отличен от x , $\varphi(x)$, $\varphi(\varphi(x))$, ... (φ — одноместный функциональный символ). Невозможен алгоритм, выясняющий по заданной конечной системе тождеств, является ли она полной системой тождеств для $\mathfrak{A}$.

Наметим доказательство теоремы 2, ограничиваясь случаем группоидной сигнатуры. Пусть l — натуральное число. Исходя из тождества $x = t$, верного в $\mathfrak{A}$, можно, если l не «слишком мало», построить термы τ_1, τ_2 от одной переменной x такие, что

1°) каждый из двух максимальных собственных подтермов τ_1 содержит не более l вхождений x ; то же для τ_2 ;

2°) τ_1 не может быть получен подстановкой ни из какого терма от одной переменной, содержащего от двух до l включительно вхождений переменной (и не есть x); то же для τ_2 ;

3°) τ_1 не получается из τ_2 подстановкой, и наоборот;

4°) $\mathfrak{A}$ удовлетворяет тождествам $\tau_1 = \tau_2 = x$.

(Если, например, t есть $x \circ x$, то в качестве τ_1 и τ_2 можно взять термы $\dots((x \circ x) \circ x) \dots \circ x$ и $x \circ (\dots((x \circ x) \circ x) \dots \circ x)$ с $l+1$ буквами x в каждом.)

Для каждого слова W в алфавите $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ определим * терм T_W следующим образом: $T_\alpha \equiv x$; $T_{\alpha_j W} \equiv S_{T_W}^x \tau_j$ ($j = 1, 2$). Для каждой пары (Z, R) , где $Z = \{P_1 = Q_1, \dots, P_s = Q_s\}$ — задание конечно определенной подгруппы (с единицей) Π_Z с образующими α_1, α_2 , а R — слово в $\{\alpha_1, \alpha_2\}$, определим систему тождеств $\Xi(Z, R) = \{T_{P_i} = T_{Q_i}, i = 1, \dots, s; S_k^{x'} T_R = S_k^{x''} T_R, k = 1, \dots, m\}$, где $\Sigma_0 = \{t_1' = t_1'', \dots, t_m' = t_m''\}$ — данная полная система тождеств для группоида $\mathfrak{A}$. Непосредственно проверяется, что А) в силу 4°) для любых (Z, R) $\Xi(Z, R)$ верна для $\mathfrak{A}$; В) если Π_Z одноэлементна, то $\Xi(Z, R) \vdash \Sigma_0$. Покажем, что С) если l достаточно велико, Π_Z бесконечна, а R — ее левый нуль, т. е. $R\alpha_1 = R\alpha_2 = R$ в Π_Z , то существует группоид, удовлетворяющий $\Xi(Z, R)$, но не удовлетворяющий Σ_0 .

С этой целью на множестве M элементов Π_Z определим сначала бинарную операцию * так, чтобы $\langle M; * \rangle$ был свободным группоидом ранга 1; пусть a — его образующий. Определим теперь на M по частям операцию $\circ$ следующим образом. Если (константный) терм $u * v$, где u и v выражены через $a, *$, может быть получен подстановкой из терма от одной переменной с числом вхождений этой переменной от 2 до l , то положим $u \circ v = u * v$. Тогда, как можно показать исходя из 1°) — 3°), для любого $x \in M$ значения максимальных собственных подтермов термов τ_1 и τ_2 уже определены (здесь и далее предполагается, что операция в τ_1, τ_2 обозначена $\circ$), но значения τ_1 и τ_2 еще не определены, причем, если обозначить $\tau_1 \equiv \tau_1' \circ \tau_1''$, $\tau_2 \equiv \tau_2' \circ \tau_2''$, то для различных пар x, i ($i = 1, 2; x \in M$) соответствующие (уже определенные) упорядоченные пары элементов M (τ_i', τ_i'') также различны, так что можно, продолжая определение операции $\circ$, положить для каждого $x \in M$ и $i = 1, 2$ $\tau_i' \circ \tau_i'' = \alpha_i x$ (в правой части последнего равенства умножение рассматривается в Π_Z). Доопределяя $\circ$ на M произвольно, получим группоид $G = \langle M; \circ \rangle$, для которого при любом W $T_W \equiv Wx$ (справа опять подразумевается умножение в Π_Z). Отсюда следует, что в G тождественно $T_{P_j} = T_{Q_j}$, $j = 1, \dots, s$, и $T_R = S_x^{x'} T_R$; с другой стороны, по построению в G невозможно равенство значений, скажем, при $x = a$, никаких двух различных термов от x с числом вхождений x не большим l . Это доказывает С): G и есть искомым группоид (при достаточно большом l).

Построения, близкие к (1, 2), дают алгоритм, который по заданному ассоциативному исчислению и двум словам строит Z и R так, что Π_Z одно-

* $\equiv$ обозначает графическое равенство; $S_A^x B$ — результат подстановки A вместо (каждого вхождения) x в B .

элементарна, если данные слова равны в данном исчислении, и P_z бесконечна и в ней $Ra_1 = Ra_2 = R$ в противном случае. В сочетании с А), В), С) это доказывает теорему.

Теорема 1 доказывается совершенно аналогично (с одноэлементной алгеброй в качестве $\mathfrak{A}$).

Дополнительные замечания. 1. Изложенный метод устанавливает для каждого из рассматриваемых свойств 1-сводимость креативного множества (или его дополнения) к множеству всех Σ с данным свойством. Например, для алгебры $\mathfrak{A}$, удовлетворяющей условиям теоремы 2, множество всех полных систем тождеств креативно.

2. Легко понять, что аналог теоремы 2 для произвольной $\mathfrak{A}$ (с конечным базисом тождеств) неверен. Оказывается, существуют даже конечные алгебры, для которых конечные полные системы тождеств образуют бесконечное рекурсивное множество. Таков, например, группоид с элементами 0, 1, 2 и операцией $x \circ y = \max\{x + y - 2, 0\}$. (В этом примере мощность алгебры уменьшить невозможно.)

3. Используя результат ⁽⁵⁾, нетрудно проверить, что теорема 1 и утверждения о нераспознаваемости свойств а) — д) имеют место уже в классе систем Σ из 5 тождеств, а теорема 2 — для Σ с числом тождеств на 4 больше, чем заданный базис тождеств для $\mathfrak{A}$.

4. Ясно, что сформулированные результаты теряют силу, если вместо произвольных Σ ограничиться рассмотрением систем, содержащих определенные тождества. Например, если рассматривать только системы Σ (сигнатуры группоида), содержащие тождество $(xy)z = x(yz)$ (полугрупповые системы тождеств), то можно по произвольной Σ этого класса узнать, выводимо ли из Σ тождество $x = y$, или $x^2 = x$, и т. п. (см., например, ⁽⁶⁾). Отметим, что методом, с помощью которого в ⁽⁷⁾ строилась конечная система полугрупповых тождеств с нерекурсивным множеством тождеств-следствий, можно построить и двойственный пример тождества E , для которого множество $\{\Sigma \mid \{(xy)z = x(yz)\} \cup \Sigma \vdash E\}$ рекурсивно.

5. Основные результаты данной работы получены в 1968—1969 гг. После того, как настоящая заметка была подготовлена к печати, автор узнал о работе ⁽⁸⁾, вышедшей еще в 1967 г., в которой установлена нераспознаваемость свойств а), г) и д) (последних двух — лишь для сигнатур несколько более сложных, чем группоидная). Те же методы, по-видимому, позволяют получить и ряд других результатов типа нераспознаваемости свойств а) — д), но не типа теорем 1, 2.

Институт прикладной математики
Академии наук СССР

Поступило
18 VI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. А. Марков, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 42 (1954).
² Г. С. Цейтин, ДАН, 107, № 2, 209 (1956). ³ А. И. Мальцев, Матем. сборн., 69, № 1, 3 (1966). ⁴ Т. Evans, B. H. Neumann, J. Lond. Math. Soc., 28, 342 (1953). ⁵ Ю. В. Матиясевич, ДАН, 173, № 6, 1264 (1967). ⁶ А. П. Бирюков, ДАН, 149, № 2, 230 (1963). ⁷ В. Л. Мурский, Матем. заметки, 3, № 6, 663 (1968).
⁸ P. Perkins, Notre Dame J. Formal Logic, 8, № 3, 175 (1967).