

А. И. РАЙХБЕРГ

ЭКСТРЕМАЛЬНО НЕСВЯЗНЫЕ ПРОСТРАНСТВА С ЕДИНСТВЕННЫМ ГОМЕОМОРФИЗМОМ НА СЕБЯ

(Представлено академиком П. С. Александровым 23 IV 1970)

В 1948 г. Г. Биркгоф (¹) поставил задачу: всякая ли булева алгебра имеет нетождественный изоморфизм на себя? В 1951 г. М. Катетовым (⁶) был построен противоречащий пример. Вопрос остался не разрешенным для полных (ш-полных) булевых алгебр, или в эквивалентной формулировке: всякий ли экстремально несвязный * (ш-экстремально несвязный) бикомпакт имеет нетождественный гомеоморфизм на себя? Если в этой формулировке отказаться от бикомпактности, то задача решается отрицательно (теорема 2).

Все пространства в этой заметке являются вполне регулярными. Через pX будем обозначать абсолют ** топологического пространства X , через $G(X)$ — группу гомеоморфизмов X на себя и $G_x(X)$ — орбиту точки $x \in X$ относительно этой группы, через $GF(X)$ и $GFI(X)$ — группы совершенных многозначных и неприводимых совершенных многозначных отображений X на X , через wX , πX , sX и cX вес, π -вес, плотность и число Суслина пространства X соответственно.

Сформулируем ряд нужных нам ранее доказанных результатов.

Предложение 1. Пусть X — экстремально несвязный бикомпакт, D сильно дискретно в X . Тогда $[D] = \beta D$ (⁴, ²).

Предложение 2. Пусть X — экстремально несвязный бикомпакт, S — плотное в X подмножество. Тогда S экстремально несвязно и $\beta S = X$ (², ¹⁰).

Предложение 3. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — совершенное неприводимое (однозначное) отображение. Тогда $\pi X = \pi Y$, $cX = cY$ (более того, прообраз плотной в Y системы открытых множеств является плотной в X системой открытых множеств) (⁷, ⁹).

Предложение 4. Пусть Y экстремально несвязный бикомпакт π -веса τ . Тогда найдется бикомпакт X веса τ , абсолют которого гомеоморфен Y (⁷).

Предложение 5. $GFI(X) \approx G(pX)$ (⁵, ⁸, ¹⁰).

Предложение 6. Для того чтобы многозначное отображение $f: X \rightarrow Y$ было совершенным, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие пространства Z (график отображения f) и однозначные совершенные отображения

$$\varphi: Z \rightarrow X, \quad \psi: Z \rightarrow Y, \quad \text{что } f = \psi \varphi^{-1}.$$

Лемма. Пусть X — бикомпакт веса τ . Тогда $|GF(X)| \leq \exp \tau$.

Доказательство. Пусть $f \in GF(X)$. Оно определяется (предположение 6) своим графиком $Z \subseteq X \times X$ и проекциями $\varphi, \psi: Z \rightarrow X$, причем Z — бикомпакт и $wZ \leq \tau$, а таких бикомпактов $\leq \exp \tau$. Отображений

* Свойства экстремально несвязных пространств достаточно полно изложены в (²).

** Все понятия, связанные с теорией абсолюта: неприводимые совершенные отображения, плотные системы, π -вес — можно найти в работах (³, ⁵, ⁷⁻¹⁰).

$\varphi: Z \rightarrow X$ также $\leq \text{exp } \tau$, так как $sZ \leq \tau$, $|X| \leq \text{exp } \tau$ и $(\text{exp } \tau)^\tau = \text{exp } (\tau^2) = \text{exp } \tau$. Таким образом $|GF(X)| \leq (\text{exp } \tau)^3 = \text{exp } \tau$.

Теорема 1. Пусть Y экстремально несвязный бикомпакт π -веса τ . Тогда $|G(Y)| \leq \text{exp } \tau$, в частности, если $|Y| > \text{exp } \tau$, то Y неоднороден.

Доказательство. Существует бикомпакт X веса τ , абсолют которого гомеоморфен Y (предложение 4), тогда (предложение 5 и лемма) получаем, что $|G(Y)| = |GFI(X)| \leq GF(X) \leq \text{exp } \tau$.

Теорема 2. Существует экстремально несвязное пространство Y с единственным гомеоморфизмом на себя id_Y , причем оно может быть выбрано так, что $|Y| = \pi Y = sY = cY = \tau$, где τ — произвольный бесконечный кардинал.

Доказательство. Пусть D — дискретное пространство мощности τ , в D — его одноточечная бикомпактификация, $X = (bD)^{\aleph_0} = \prod_{i=1}^{\infty} (bD)_i$.

Заметим, что $wX = \pi X = sX = cX = \tau$. Покажем, что для всякого открытого в X множества U $cU = \tau$. В самом деле, возьмем номер n такой, что $\pi_n U = bD$ (π_n — проекция X на n -й сомножитель), тогда дизъюнктная система $\{U \cap (\{x\}_n \times \prod_{i \neq n} (bD)_i) : x \in D\}$ открытых непустых множеств бу-

дет искомой. Следовательно (предложение 1 и 3) всякое открытое в pX множество имеет мощность $\geq \text{exp } \text{exp } \tau$.

Заметим, что $\pi pX = spX = cpX = \tau$ (предложение 3), тогда $|pX| = \text{exp } \text{exp } \tau$ и $|U| = \text{exp } \text{exp } \tau$ для всякого открытого в pX множества U , и, следовательно, $wpX = \text{exp } \tau$. Таким образом, существуют неоднородные экстремально несвязные бикомпакты pX с $\Delta pX = |pX|$ *, $\pi pX = spX = cpX = \tau$, где τ — произвольный бесконечный кардинал.

Пусть $\{V_\xi : \xi < \omega, |\omega| = \tau\}$ плотная система открытых в pX множеств, которая содержит дизъюнктную подсистему мощности τ . Последовательно выбираем точки $y_\xi \in V_\xi \setminus \bigcup \{G_{y_\eta}(pX) : \eta < \xi\}$, что можно сделать, так как $|V_\xi| = \text{exp } \text{exp } \tau > \text{exp } \tau \geq |\bigcup \{G_{y_\eta}(pX) : \eta < \xi\}|$. Положим $Y = \{y_\xi : \xi < \omega\}$, заметим, что $[Y] = pX$ и потому Y экстремально несвязно (предложение 2). Из построения вытекает, что, во-первых, $G(Y) = \{\text{id}_Y\}$ (предложение 2), и, во-вторых, $|Y| = \pi Y = sY = cY = \tau$, ибо $\tau = |Y| \geq \pi Y \geq sY \geq cY \geq \tau$. Теорема доказана.

Работа написана под руководством В. И. Пономарева, которому я выражаю свою глубокую благодарность.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
15 IV 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ G. Birkhoff, Lattice Theory, N. Y., 1948, 1964; Теория структур, М., 1952.
- ² L. Gillman, M. Jerison, Rings of Continuous Functions, Princeton, 1960. ³ A. M. Gleason, M. J. Illinois, 2, 4a, 482 (1958). ⁴ Б. Ефимов, ДАН, 183, № 3, 511 (1968). ⁵ С. Илиадис, С. Фомин, УМН, 21, 4, 47 (1966). ⁶ M. Katětov, Coll. Math., 2, 229 (1951). ⁷ В. И. Пономарев, УМН, 21, 4, 91 (1966). ⁸ В. И. Пономарев, Матем. сборн., 60, 89 (1963). ⁹ В. И. Пономарев, Матем. сборн., 51, 515 (1960). ¹⁰ В. И. Пономарев, ДАН, 149, 26 (1963).

* Дисперсионный характер $\Delta X = \min \{|U| : U \text{ открыто в } X\}$.