Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 3

УДК 517.948.32+.33 *МАТЕМАТИКА*

М. Н. ОГЮЗТОРЕЛИ, (M. N. OGUZTÖRELI), Д. И. МАНЖЕРОН (D. I. MANGERON)

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ СЛОЖНЫХ СТРУКТУР. О РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 21 IX 1970)

1. Многогранные и глубокие результаты трудов Н. Н. Боголюбова, в частности, в его плодотворном сотрудничестве с Н. М. Крыловым и Ю. А. Митропольским, изложенные в ряде книг ([1–3]) на русском, а затем и в переводах на другие языки, естественно включаются в рамки математики сложных структур, пришедшей на смену предыдущим фазам развития математики, а именно математики форм, количеств и простых структур ([4, 5]).

Параллельно с общим развитием исследований математических систем сложных (или изолированных) структур в последние десятилетия проводятся исследования по математическим уравнениям: например, операторным (([1]), стр. 635—645, ([6]), стр. 1—116), функциональным ([7, 8]), конечноразностным ([9]), дифференциальным уравнениям с запаздывающим аргументом ([10]), интегральным ([11]), интегро-дифференциальным с (без) запаздывающим аргументом ([12, 13]), стохастическим дифференциальным ([14]), дифференциально-разностным уравнениям ([15]).

Авторы этой заметки, возможно, впервые начали исследование математических систем более сложных структур, как например, интегро-дифференциальных уравнений с поливолновыми, полигармоническими и политепловыми операторами с наследственностью и отклоняющимся аргументом ([16–20]), причем поливолновые уравнения были названы некоторыми советскими, итальянскими, французскими и американскими исследователями уравнениями Манжерона ([21]).

Ниже приводятся решения некоторых классов линейных и нелинейных функционально-интегральных уравнений.

2. Рассмотрим линейное неоднородное функционально-интегральное уравнение

$$f(x+y,t)=Q(t)+\int_0^t K(t,\tau)\,[f(x,\tau)+f(y,\tau)]\,d\tau, \tag{2,1}$$

где $K(t,\tau)$ — непрерывная, имеющая непрерывные производные любого порядка по t функция, а $Q(t)$ — известная непрерывная функция. Положим

$$f(0,t)=\Phi(t). \tag{2,2}$$

Для $x=y=0$ уравнение (2,1) обращается в линейное неоднородное интегральное уравнение типа Вольтерра

$$\Phi(t)=Q(t)+2\int_0^t K(t,\tau)\,\Phi(\tau)\,d\tau, \tag{2,3}$$

имеющего решение

$$\Phi(t)=Q(t)+2\int_0^t \Gamma(t,\tau,2)\,Q(\tau)\,d\tau, \tag{2,4}$$

где $\Gamma(t, \tau, \lambda^*)$ — разрешающее ядро ядра $K(t, \tau)$, соответствующее значению λ^* параметра λ.

Для $y = 0$ уравнение (2,1) приводится к виду

$$f(x, t) = {}^1/_2 [Q(t) + \Phi(t)] + \int_0^t K(t, \tau) f(x, \tau)\, d\tau, \tag{2,5}$$

а, следовательно, для $f(x, t)$ получается выражение

$$f(x, t) = Q(t) + \int_0^t [\Gamma(t, \tau, 2) + \Gamma(t, \tau, 1)]\, Q(\tau)\, d\tau + \\ + \int_0^t Q(\tau)\, d\tau \int_\tau^t \Gamma(t, \sigma, 1)\, \Gamma(\sigma, \tau, 2)\, d\sigma. \tag{2,6}$$

Если принять во внимание соотношение ([22])

$$\Gamma(t, \tau, 2) - \Gamma(t, \tau, 1) = \int_\tau^t \Gamma(t, \sigma, 1)\, \Gamma(\sigma, \tau, 2)\, d\sigma, \tag{2,7}$$

то вышеизложенное приводит к теореме.

Теорема 1. *Единственное решение* $f(x, t)$ *функционально-интегрального уравнения* (2,1) *записывается в форме*

$$f(x, t) \equiv \Phi(t) = Q(t) + 2\int_0^t \Gamma(t, \tau, 2)\, Q(\tau)\, d\tau. \tag{2,8}$$

3. Рассмотрим теперь функционально-интегральное уравнение

$$(x, t) + f(y, t) - f(x + y, t) = Q(t) + \int_0^t K(t, \tau)\, [f(x, \tau) + f(y, \tau)]\, d\tau, \tag{3,1}$$

где функции $Q(t)$ и $K(t, \tau)$ были охарактеризованы выше. Принимая во внимание обозначение (2,2), уравнение (3,1) приводим при $x = y = 0$ к уравнению (2,3) для неизвестной функции $\Phi(t)$, значение которой дано выражением (2,4).

Для $y = 0$ уравнение (3,1) имеет вид

$$\Phi(t) - Q(t) - \int_0^t K(t, \tau)\, \Phi(\tau)\, d\tau = \int_0^t K(t, \tau) f(x, \tau)\, d\tau, \tag{3,2}$$

или же с учетом (2,3),

$$\int_0^t K(t, \tau) f(x, \tau)\, d\tau = \int_0^t K(t, \tau)\, \Phi(\tau)\, d\tau. \tag{3,3}$$

Для решения этого интегрального уравнения типа Вольтерра первого рода ([23]), возьмем почленное производное уравнения (3,3) по t:

$$K(t, t) f(x, t) + \int_0^t \frac{\partial K(t, \tau)}{\partial t} f(x, \tau)\, d\tau = K(t, t)\, \Phi(t) + \int_0^t \frac{\partial K(t, \tau)}{\partial t} \Phi(\tau)\, d\tau. \tag{3,4}$$

Если $K(t, t) \neq 0$, неизвестная функция $f(x, t)$ — решение нижеследующего интегрального уравнения типа Вольтерра второго рода

$$f(x, t) + \int_0^t \frac{K_t(t, \tau)}{K(t, t)} f(x, \tau)\, d\tau = \Phi(t) + \int_0^t \frac{K_t(t, \tau)}{K(t, t)} \Phi(\tau)\, d\tau. \tag{3,5}$$

Если же $K(0, 0) = 0$, предположим, что

$$K(t, t) = \frac{\partial}{\partial t} K(t, \tau)\Big|_{\tau=t} = \ldots = \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} K(t, \tau)\Big|_{\tau=t} = 0, \quad \frac{\partial^m K(t, \tau)}{\partial t^m}\Big|_{\tau=t} \neq 0. \tag{3,6}$$

функция $f(x, t)$ удовлетворяет в этом случае интегральному уравнению типа Вольтерра второго рода

$$f(x,t)+\int_0^t \frac{\partial^{m+1} K(t,\tau)/\partial t^{m+1}}{\partial^m K(t,\tau)/\partial t^m\,|_{\tau=t}} f(x,\tau)\,d\tau=\Phi(t)+\int_0^t \frac{\partial^{m+1} K(t,\tau)/\partial t^{m+1}}{\partial^m K(t,\tau)/\partial t^m\,|_{\tau=t}}\Phi(\tau)d\tau. \tag{3,7}$$

Вышеизложенное можно заключить теоремой:

Теорема 2. *При предположениях, сделанных в этом параграфе, единственное решение уравнения* (3,1) *имеет вид*

$$f(x,\ t)=\Phi(t). \tag{3,8}$$

4. Рассмотрим теперь нелинейное функционально-интегральное уравнение

$$f(x+y,\alpha)=Q(\alpha)+\lambda\int_0^\alpha K(\alpha,\beta)f(x,\beta)f(y,\beta)\,d\beta, \tag{4,1}$$

функции $Q(\alpha)$ и $K(\alpha, \beta)$ прежние.

При $x=y=0$, принимая во внимание обозначение (2,2), уравнение (4,1) можно привести к нелинейному неоднородному интегральному уравнению типа Вольтерра

$$\Phi(\alpha)=Q(\alpha)+\lambda\int_0^\alpha K(\alpha,\beta)\,\Phi^2(\beta)\,d\beta. \tag{4,2}$$

Как известно ([6], стр. 276—277), если $Q(\alpha)$ — непрерывная в интервале $0\leqslant\alpha\leqslant A$ функция, функция $F(\lambda,\ \alpha,\ \beta,\ \Phi)\equiv\lambda K(\alpha,\ \beta)\Phi^2(\beta)$ удовлетворяет в области D $(0\leqslant\beta\leqslant\alpha\leqslant A,\ |\Phi-Q(\alpha)|\leqslant p)$ условию Липшица и имеет там ограниченный модуль $|F(\lambda,\ \alpha,\ \beta,\ \Phi)|\leqslant M$, то при $r=\min\{A,\ p/M\}$ уравнение (4,2) имеет единственное непрерывное решение $\Phi(\alpha,\lambda)$ в интервале $\alpha\in[0, r]$.

При $y=0$ уравнение (4,1) приводится к виду

$$f(x,\alpha)=Q(\alpha)+\lambda\int_0^\alpha \Phi(\beta,\lambda)\,K(\alpha,\beta)\,f(x,\beta)\,d\beta. \tag{4,3}$$

Это позволяет заключить настоящую заметку теоремой:

Теорема 3. *При предположениях, сделанных в этом параграфе, единственное решение уравнения* (4,1) *имеет вид*

$$f(x,\ \alpha,\ \lambda)\equiv\Phi(\alpha,\ \lambda). \tag{4,4}$$

Авторы полагают, что представляет интерес решение задачи, отвечающей, например, функционально-интегро-дифференциальным уравнениям

$$f^{(m)}(x+y,\alpha)=Q(\alpha)+\lambda\int_0^\alpha K(\alpha,\beta)\,[f^{(n)}(x,\beta)+f^{(n)}(y,\beta)]\,d\beta,\ \frac{\partial^n f(x,\alpha)}{\partial x^n}f^{(n)}(x,\alpha) \tag{4,5}$$

и

$$f^{(m)}(x+y,\alpha)+f^{(m)}(x-y,\alpha)=Q(\alpha)+2\lambda\int_0^\alpha K(\alpha,\beta)\,f^{(n)}(x,\beta)\,f^{(n)}(y,\beta)\,d\beta \tag{4,6}$$

или же функционально-дифференциально-разностным уравнениям, первые члены которых имеют в своей основе выражения

$$F(x_1+\xi_1,\ x_2+\xi_2)+F(x_1-\xi_1,\ x_2-\xi_2)\mp F(x_1+\xi_1,\ x_2-\xi_2)\mp \mp F(x_1-\xi_1,\ x_2+\xi_2) \tag{4,7}$$

и их обобщения на любое число независимых переменных, и, в особенности, отыскание природных явлений, моделями которых могли бы служить различные системы сложных структур.

Университет провинции Альберта
Эдмонтон, Канада

Ясский политехнический институт
Социалистическая республика Румыния

Поступило
1 VI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Н. Боголюбов, Избр. тр., 1, Киев, 1969. [2] N. N. Bogoljubov, N. M. Krylov, Introduction to non-linear mechanics, London, 1943. [3] N. N. Bogoljubov, J. A. Mitropolski, Les methodes asymptotiques en theorie des oscillations non lineaires, Paris, 1962. [4] D. Mangeron, Revista stiintifica, Iasi, **32**, 1 (1945). [5] J. A. Dieudonne, Am. Math. Monthly, 77, 134 (1970). [6] T. L. Saaty, Modern Nonlinear Equations, N. Y.— Toronto, 1967. [7] Al. C. Climesco, Bull. Polytechn. Inst. Jassy, N. S., **13** (17), 1—4, 3—4 (1967). [8] J. Aczel, On Applications and Theory of Functional Equations, N. Y.— London, 1969. [9] A. D. Myshkis, Lineare Differentialgleichungen mit nacheilendem argument, Berlin, 1955. [10] A. O. Gelfond, Differenzenrechnung, Berlin, 1958. [11] И. Г. Петровский, Лекции по теории интегральных уравнений, М.— Л., 1951. [12] Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии, Фрунзе, в. 6, 1957. [13] M. N. Oğuztöreli, Time-lag Control Systems, N. Y.— London, 1966. [14] A. N. Kolmogorov, Foundations of the Theory of Probability, N. Y., 1950. [15] R. Bellman, K. L. Cooke, Differential-Difference Equations, N. Y.— London, 1963. [16] D. Mangeron, L. E. Krivosheine, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **33**, 226 (1963); **34**, 344 (1964); **35**, 341 (1965). [17] Д. Манжерон, Л. Е. Кривошеин, В сборн. Докл. III Сибирск. конфер. по математике и механике, Томск, 1964, стр. 133. [18] Д. Манжерон, Сообщ. АН ГрузССР, **33**, 521 (1964). [19] D. Mangeron, M. N. Oğuztöreli, Rend. Acad. Naz. dei Lincei, Ser. 8, **44**, 1; **45**, 74, 120 (1968). [20] D. Mangeron, C. R., A, **266**, 870, 976, 1050, 1103, 1121 (1968). [21] G. Birkhoff, Approximations with Special Emphasis on Spline Functions, N. Y.— London, 1969. [22] V. Volterra, Opere matematiche. Accad. Naz. dei lincei, Consiglio Naz. del. Ricerche, Roma, 1—5, 1954. [23] M. Picone, G. Fichera, Trattato di analisi matematica, Roma, 1957.