Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 3

УДК 681.14+624.04 *СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ*

Ю. М. ПОЧТМАН

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ КОНСТРУКЦИЙ, ПОДВЕРЖЕННЫХ ПОЛЗУЧЕСТИ

(Представлено академиком Ю. Н. Работновым 26 VI 1970)

Рассматривается применение одного из современных методов математической оптимизации — метода динамического программирования ([1–3]) — для оптимального (по условиям эксплуатации) проектирования балок и пластин, находящихся в условиях установившейся ползучести ([4]). Требуется из множества конструкций данного типа, достигающих в одно и то же время под действием одинаковых нагрузок определенной величины перемещений в произвольно заданных точках (или по линиям) поверхности, найти конструкцию, имеющую минимальный вес. При этом соответствующие главные напряжения, а также поперечные размеры сечений не должны превышать некоторых наперед заданных величин. Такая постановка вопроса, в основном, соответствует работе ([5]), в которой для исследования применялся метод множителей Лагранжа; кроме того, здесь введены некоторые дополнительные ограничения, существенно затрудняющие решение этих задач классическими вариационными методами.

1. Пусть балка прямоугольного сечения (постоянной ширины b_0 и переменной высоты $h\ (x)$) длиной l нагружена произвольного вида поперечной нагрузкой. Дифференциальное уравнение изгиба балки при степенном законе ползучести имеет вид

$$\dot{\omega}'' = B[(2n+1)\ /\ 2b_0 n]^n |M|^n \operatorname{sign} M\ /\ h^{2n+1}(x), \tag{1}$$

где $\dot{\omega}$ — скорость прогиба, M — изгибающий момент, B и n — константы ползучести. Размеры балки полностью определяются ее высотой $h(x)$ в каждой точке (с текущей координатой x) нейтральной оси. Нужно найти такой вектор $\{h(x)\}$, называемый вектором управления, который минимизирует функционал, представляющий теоретический вес балки

$$V = \gamma b \int_0^l h\,(x)\,dx, \tag{2}$$

удовлетворяет уравнению (1) во всех точках, кроме конечного числа точек на $[0, l]$:

$$\eta_P\,[\dot{\omega}\,(0), \dot{\omega}'\,(0), \dot{\omega}\,(l), \dot{\omega}'\,(l)], \quad P = 1, 2, \tag{3}$$

и следующим условиям:

$$h(x) \geqslant h_0;\quad Y_1(x) \leqslant \dot{\omega}(x) \leqslant Y_2(x);\quad \sigma(x) \leqslant [\sigma];\ \tau(x) \leqslant [\tau], \tag{4}$$

где η_P — функция граничных условий; $Y_1(x)$ и $Y_2(x)$ — некоторые заданные функции.

К решению этой задачи применим метод динамического программирования в дискретной форме ([1]). Предположим, что отрезок $[0, l]$ представляет собой M-шаговый процесс, продолжительность шага которого равна Δ, так что $M \cdot \Delta = l$. Определим функцию состояния. Пусть

$$f\,[\dot{\omega}\,(x)] = \min \int_0^l h\,(x)\,dx \tag{5}$$

величина критерия качества в предположении, что используется оптимальное управление и начальное состояние (для задачи Коши) описывается величинами $\dot{\omega}(0)$ и $\dot{\omega}'(0)$. Тогда, применяя «принцип оптимальности» Беллмана к многошаговым процессам управления, получим систему функциональных уравнений динамического программирования для рассматриваемой задачи:

$$f_N(\dot{\omega}_N, \dot{\omega}'_N) = \min_{h_N \in U} \{h_N \Delta + f_{N-1}(\dot{\omega}_{N-1}, \dot{\omega}'_{N-1})\}, \quad N = 1, 2, \ldots, M; \; f_0 = 0. \tag{6}$$

Здесь U — пространство управлений, а $\dot{\omega}_N$ удовлетворяют уравнению (1) и условиям (3). Величины $\dot{\omega}_N$ и $\dot{\omega}'_N$, являющиеся компонентами вектора состояния, определяются зависимостями

$$\dot{\omega}_{N-1} = \dot{\omega}_N - \Delta\dot{\omega}'_{N-1},$$

$$\dot{\omega}'_{N-1} = \dot{\omega}'_N + B[(2n+1)/2b_0 n]^n \cdot |M_{N-1}|^n \operatorname{sign} M_{N-1} / h_{N-1}^{2n-1}(x_{N-1}). \tag{7}$$

Полученная система рекуррентных соотношений (6), (7) позволяет создать вычислительный процесс, хорошо адаптированный к ЭЦВМ. От-

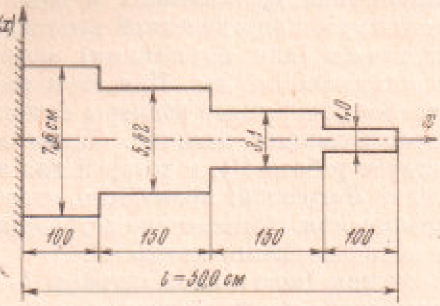

Рис. 1

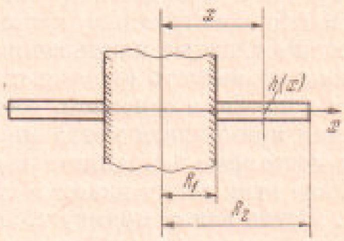

Рис. 2

метим, что этот метод в принципе допускает варьирование любого количества параметров формы поперечного сечения балок.

2. В качестве иллюстрации рассмотрим оптимальное проектирование консольной балки длиной $l = 500$ см, несущей равномерно распределенную нагрузку $q = 2{,}0$ кг/см, при следующих расчетных данных: $b_0 = 10$ см; $n = 5$; $B = 7{,}6 \cdot 10^{-20}$ (кг/см^2)^5·час и $\omega(l) \leqslant 1{,}0$ см. В результате реализации на ЭЦВМ алгоритма (6), (7) при $N = 10$ получен профиль оптимальной балки, показанный на рис. 1 (интервал изменения состояний и управления задавался, в соответствии с физическим смыслом задачи, следующим образом: $0 \leqslant \dot{\omega}_N \leqslant 1{,}0$ см; $0 \geqslant \dot{\omega}'_N \leqslant 0{,}005$ рад.; $1 \leqslant h_N \leqslant 8$ см).

3. Предлагаемый способ может быть распространен на задачи оптимизации ползущих круглых и кольцевых пластин (также применительно к периоду квазивязкого течения). Например, для кольцевой пластины (рис. 2), нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q и внутренний контур которой защемлен, описанная в п. 1 проблема сводится к минимизации функционала

$$V = 4\pi \int_{R_1}^{R_2} h(x)\, x\, dx. \tag{8}$$

Предполагая, что связь между радиальными и кольцевыми моментами соответствует условию пластичности Треска [5], после интегрирования соответствующих уравнений равновесия получим уравнение изгиба пластины в виде

$$-\dot{\omega}'' - \dot{\omega}'/x = B((2n+1)/2n)^n h^{-(2n+1)}(x)\left[{}^1\!/_4 q(R^2 - x^2) + {}^1\!/_2 qb \ln(x/R_2)\right] \tag{9}$$

при начальных условиях

$$\dot{\omega}_{(x=R_1)} = 0; \quad \dot{\omega}'_{(x=R_1)} = 0. \tag{10}$$

Следовательно, нужно найти такой вектор $\{h(x)\}$, который минимизирует (8) и удовлетворяет условиям (10) и (11). Кроме того, во всех точках пластины должны выполняться условия (4). Для этой задачи критерий качества запишется в виде

$$f[\dot{\omega}(x)] = \min \int_{R_1}^{R_2} h(x)\, x dx, \tag{11}$$

а система уравнений динамического пограммирования сохранит вид (6) с той лишь разницей, что компоненты вектора состояния в этом случае будут определяться так:

$$\dot{\omega}_{N-1} = \dot{\omega}_N - \Delta\dot{\omega}'_{N-1},$$

$$\dot{\omega}'_{N-1} = \dot{\omega}'_N + \{B((2n+1)/2n)^n h_{N-1}^{-(2n+1)}(x)[{}^1/_4 q(R^2 - x_{N-1}^2) + {}^1/_2 qb \ln(x_{N-1}/R_2] + \ddot{\omega}_{N-1}/x_{N-1}\}\Delta. \tag{12}$$

В заключение автор выражает благодарность В. А. Бараненко за помощь при выполнении вычислений на ЭЦВМ.

Днепропетровский инженерно-строительный институт

Поступило
8 VI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. Беллман, Динамическое программирование, М., 1960. [2] В. А. Бараненко, Ю. М. Почтман, ДАН, 182, № 5, 1029 (1968). [3] В. А. Бараненко, Ю. М. Почтман, ПММ, 33, № 5, 933 (1969). [4] Ю. Н. Работнов, Ползучесть элементов конструкций, М., 1966. [5] Ю. В. Немировский, Б. С. Резников, Машиноведение, № 3, 75 (1969).