Доклады Академии наук СССР
1970. Том 195, № 2

УДК 513.83

МАТЕМАТИКА

Г. Л. ГАРГ (ИНДИЯ)

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ КУРАТОВСКОГО — ДУГУНДЖИ ДЛЯ КАТЕГОРИИ МЕТРИЗУЕМЫХ РАВНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ С РАВНОМЕРНО-НЕПРЕРЫВНЫМИ ОТОБРАЖЕНИЯМИ

(Представлено академиком П. С. Александровым 23 IV 1970)

Известная теорема К. Куратовского *, обобщенная Дугунджи [2, 3] на категорию метризуемых топологических пространств, связывает вопрос о непрерывном продолжении $ef: X \to Y$ непрерывного отображения $f: A \to Y$ замкнутого множества A (при надлежащих ограничениях размерностного типа, налагаемых на $X \setminus A$) со свойствами связности и локальной связности пространства Y в высших размерностях, а также с задачей ретракции произвольного пространства Z на образ iY пространства Y при замкнутом ** топологическом вложении i (и, разумеется, при аналогичных ограничениях, налагаемых на $Z \setminus iY$).

Основная цель этой работы — изучение вопроса о продолжении отображений в категории метризуемых равномерных пространств с равномерно-непрерывными отображениями и также получение аналога уже упомянутой теоремы Куратовского для этого случая.

Как оказалось, в этих вопросах существенную роль играет следующая размерностная характеристика ***: о т н о с и т е л ь н а я б о л ь ш а я р а з м е р н о с т ь $r\ \Delta d(M)$ множества M равномерного пространства X. По определению $r\Delta d(M) = \sup \Delta d(B)\ /\ B\bar{\delta}(X \setminus M)$, где Δd — большая размерность в смысле Исбелла [4], а δ — отношение близости, порожденное известным образом равномерной структурой пространства X. Если X — метризуемо (равномерным образом), а ρ — некоторая его равномерная метрика, то отношение $B\delta C$ эквивалентно равенству $\rho(B, C) = 0$ и, следовательно, $r\Delta d(M) = \sup\limits_{B} \Delta d(B)\ /\ \rho(B, X \setminus M) > 0$. Поскольку размерность Δd монотонна, то $r\Delta d(M) \leqslant \Delta d(M)$.

Вот утверждения, представляющиеся нам основными:

Т е о р е м а 1. *Для полного пространства **** Y следующие три условия эквивалентны:*

I. *Пространство Y локально-связно во всех размерностях ***** $< n$ (и связно во всех размерностях ***** $< n$);*

II. *Если A — замкнуто в пространстве X, а $X \setminus A$ — прекомпактно и $r\Delta d(X \setminus A) \leqslant n$, то всякое отображение $f: A \to Y$ продолжаемо в отображение $f_U: U \to Y$ (соответственно $f_X: X \to Y$), где U — некоторая равномерная окрестность множества A;*

---

* См. [1], § 53, IV или [2], гл. 3, § 9.

** Это, очевидно, эквивалентно обычно утверждаемому в этой ситуации условию замкнутости образа iY в пространстве Z.

*** Предложенная Ю. М. Смирновым.

**** Под «пространством» мы всюду далее будем понимать метризуемое равномерное пространство, под «отображением» — равномерно-непрерывное отображение, под «продолжением отображения» — равномерно-непрерывное продолжение, под «ретракцией» — равномерно-непрерывную ретракцию, наконец, под «вложением» — равномерное вложение.

***** В смысле Александера — Лефшеца, см. [2], гл. I, § 17 или [1], § 53, IV.

III. *Для всякого такого замкнутого вложения i: $Y \to Z$ в пространство Z, что $Z \setminus iY$ — прекомпактно и $r\Delta d(Z \setminus iY) \leqslant n$ существует ретракция r_U: $U \to iY$ (соответственно r_Z: $Z \to iY$), где U — некоторая равномерная окрестность множества iY* *.

Теорема 1′. *Утверждения теоремы 1 останутся верными, если в условии II заменить размерность $r\Delta d(X \setminus A)$ на $\Delta d(X \setminus A)$, если в том же условии потребовать, чтобы пространство X было компактным* **, *наконец, если указанные выше замену и требование соединить вместе.*

Теорема 1″. *Если Y — полно и $\Delta dY \leqslant n$, то тогда каждому из условий теоремы 1 эквивалентно условие, полученное заменой в условии III размерности $r\Delta d(Z \setminus iY)$ на $\Delta d(Z \setminus iY)$.*

Приведем краткое доказательство эквивалентности «интегральных» условий I и II. Так как $r\Delta d(X \setminus A) \leqslant \Delta d(X \setminus A)$, то самым слабым из условий теоремы 1′ и условия II будет условие II′, полученное одновременно и заменой размерности $r\Delta d(X \setminus A)$ на $\Delta d(X \setminus A)$ и требованием компактности пространства X. Применим его к случаю куба $X = I^n$ и непрерывного отображения f: $A \to Y$, где A — замкнуто в X. Так как это отображение f — равномерно-непрерывно и $\Delta d(X \setminus A) \leqslant \Delta dX = \dim X = n$, то это возможно. Значит, всякое такое отображение f: $A \to Y$ продолжаемо в непрерывное отображение ef: $X \to Y$. Но тогда по теореме Куратовского выполнено условие I. Выведем теперь из условия I условие II. Для этого рассмотрим пополнение cX пространства X, о котором говорится в II (оно метризуемо). Обозначим через $\bar{M}$ — замыкание множества $M (M \subseteq X)$ в пополнении cX. Нетрудно видеть, что $\overline{X \setminus A}$ — компактно, а $\bar{A}$ является пополнением множества A. Поэтому отображение f продолжаемо в отображение $\bar{f}$: $\bar{A} \to Y$ (ведь Y полно). Пересечение $B = \bar{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$ — компактно и лежит в $\overline{X \setminus A}$. Так как $\overline{X \setminus A} \setminus B$ открыто, то является объединением счетного числа компактов C_j (где $C_j \subseteq C_{j+1}$), для которых $\dim C_j = \Delta dC_j \leqslant r\Delta d(X \setminus A) \leqslant n$. Значит, $\dim(\overline{X \setminus A} \setminus B) \leqslant n$. Но тогда в силу условия I отображение $\bar{f}_B$: $B \to Y$, согласно классической теореме Куратовского, можно продолжить в отображение $\tilde{f}$: $\overline{X \setminus A} \to Y$. Так как $\overline{X \setminus A}$ компактно, и на B отображения $\bar{f}$ и $\tilde{f}$ совпадают, то определенное ими окончательное отображение cf: $cX \to Y$ равномерно-непрерывно. Этим доказана не только первая часть теоремы 1, но и вся теорема 1′.

Существенную роль в доказательстве оставшейся части теоремы 1 играет следующая, аналогичная одному известному предложению Ханнера ([5–7]),

Теорема 2. *Для всякого отображения f: $A \to Y$, замкнутого в пространстве X множества A в пространство Y, существует пространство Z, отображение F: $X \to Z$ и замкнутое равномерное вложение i: $Y \to Z$, удовлетворяющие следующим условиям:*

α) *$i(f(x)) = F(x)$, если $x \in A$,*

β) *на множестве $X \setminus A$ отображение F является гомеоморфизмом* ***,

γ) *на всяком множестве B, далеком от A* ****, *отображение F является равномерным гомеоморфизмом.*

Доказательство этой теоремы — конструктивное: на множестве $Z = Y \cup (X \setminus A)$ (полагая, что $Y \cap (X \setminus A) = \phi$) строится метризуемая равномерная структура, превращающая множество Z в искомое пространство. Из этой теоремы непосредственно получаем важное общее

Следствие. *Для любого пространства Y следующие два условия эквивалентны:*

---

* В «интегральных» условиях II и III, получаемых с помощью изменений, указанных в скобках, пояснения об окрестностях U не нужны.

** Тогда разность $X \setminus A$ будет автоматически прекомпактной.

*** Этот гомеоморфизм — равномерно непрерывен (так как равномерно-непрерывно F). Но он не обязан быть равномерным.

**** Т. е., $\bar{B}\delta A$ или, что эквивалентно, $\rho(B, A) > 0$.

II. *Если A замкнуто в пространстве X, то всякое отображение f: $A \to Y$ продолжаемо на некоторую равномерную окрестность U множества A (на все X)*;

III. *Для всякого замкнутого вложения i: $Y \to Z$ существует ретракция r_U: $U \to iY$ (соответственно r_Z: $Z \to iY$), где U — некоторая равномерная окрестность множества iY* *.

Теперь для доказательства оставшейся части теоремы 1 надо заметить, что в условиях теоремы 2 из прекомпактности разности $X \setminus A$ вытекает прекомпактность разности $Z \setminus iY$ и что $r\Delta d(Z \setminus iY) = r\Delta d(X \setminus A)$ (в силу условия γ) **. Заметим еще, что теорема 6 (Исбелл ([4]), гл. V) по существу утверждает, что для любых равномерного пространства X и его подпространства A имеет место равенство $\Delta dX = \operatorname{Max}\{\Delta dA, r\Delta d(X \setminus A)\}$. Отсюда и из теоремы 2 вытекает, что утверждение нашего следствия останется верным для всякого пространства Y размерности $\Delta dY \leqslant n$, если в условии II потребовать, чтобы $\Delta d(X \setminus A) \leqslant n$, а в условии III — чтобы $\Delta d(Z \setminus iY) \leqslant n$ ***. Этим доказана и теорема $1''$.

Отказаться в первой части теоремы 1 от условия полноты пространства Y нам удалось лишь в случае полных подпространств A:

Теорема $1'''$. *Для всякого пространства Y следующие два условия эквивалентны*:

I. *Пространство Y локально-связно во всех размерностях $< n$ (и связно во всех размерностях $< n$)*;

II. *Если A — полное подпространство пространства X, и разность $X \setminus A$ — прекомпактна и $r\Delta d(X \setminus A) \leqslant n$, то всякое отображение f: $A \to Y$ продолжаемо в отображение f_U: $U \to Y$ (соответственно f_X: $X \to Y$), где U — некоторая равномерная окрестность множества A.*

Замечание 1. Разумеется, остается верной в этих условиях и теорема, аналогичная теореме $1'$, о возможных видоизменениях условий II, причем с равным правом вместо компактности пространства X можно пользоваться и полнотой.

Замечание 2. При $n = 0$ всякое пространство связно и локально-связно во всех размерностях $< n$. Поэтому естественно выделить нульмерный случай:

Теорема 0. *Если A замкнуто в пространстве X и $r\Delta d(X \setminus A) = 0$, то существует ретракция r: $X \to A$; при этих же условиях всякое отображение f: $A \to Y$ в произвольное равномерное пространство Y имеет продолжение F: $X \to Y$* ****.

Замечание 3. Можно провести примеры, показывающие, что условие прекомпактности разности $X \setminus A$, а также условие полноты пространства Y в теореме 1 существенны: теорема 1 не верна, если выкинуть хотя бы одно из них.

Замечание 4. В теореме 2 «О равномерной ханнеризации» нельзя потребовать, чтобы выполнялось неравенство $\Delta d(Z \setminus iY) \leqslant \Delta d(X \setminus A)$. Это можно показать на следующем примере. Пусть Y — компактное пространство размерности $\Delta dY = \dim Y \geqslant 2$. За пространство X примем отрезок $[0, 1]$, а за множество A — канторово совершенное множество C, а за отображение f: $A \to Y$ — отображение канторова множества C на Y, которое существует в силу известной теоремы П. С. Александрова. Из свойств равномерной размерности легко следует, что для любого вложения i: $Y \to Z$ в пространство Z и любого отображения F: $X \to Z$, удовлетворяющего лишь условию α) и условию $F(X \setminus A) \subseteq Z \setminus iY$, выполняется неравенство $\Delta d(Z \setminus iY) \geqslant \Delta dY > \Delta d(X \setminus A) = 1$.

---

* Для полного пространства Y утверждение следствия вытекает из некоторых предложений Исбелла (см. ([4]) гл. III, сл. 17).

** Равенство $\Delta d(Z \setminus iY) = \Delta d(X \setminus A)$ здесь может не выполняться. См. замечание 4.

*** Неизвестно, будет ли это верно без ограничения $\Delta dY \leqslant n$.

**** Частный случай этой теоремы приведен в работе ([8]).

Замечание 5. В силу следствия 17 ([4], глава III), утверждение нашего следствия в случае полного пространства Y справедливо для любых равномерных пространств.

Замечание 6. Следует заметить, что все наши утверждения будут верны, если в каждом утверждении заменим Δd на равномерную размерность δd в смысле Смирнова ([9]).

Выражаю глубокую благодарность Ю. М. Смирнову, под руководством которого сделана эта работа.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Пенджаби университет
Патиала, Индия

Поступило
22 IV 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] К. Куратовский, Топология, I, II, М., 1966, 1969. [2] K. Borsuk, Theory of Retracts, Warszawa, 1967. [3] J. Dugundji, Comp. Math., 13, 229 (1958). [4] J. R. Isbell, Uniform Spaces, AMS, 1964. [5] O. Hanner, Ark. Math., 1, 375 (1951). [6] O. Hanner, Ark. Math., 1, 389 (1951). [7] O. Hanner, Ark. Math., 2, 315 (1952). [8] Г. Л. Гарг, Сиб. матем. журн., 12, № 1 (1971). [9] Ю. М. Смирнов, Матем. сборн., 38 (80), 3, 283 (1956).