Доклады Академии наук СССР
1970. Том 195, № 2

УДК 517:533.9

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В. Я. ГОЛЬДИН, Б. Н. ЧЕТВЕРУШКИН

ЭФФЕКТИВНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЕ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 8 IV 1970)

1. Перенос излучения в плазме описывается уравнением [1]

$$\Omega\nabla I_\nu + \varkappa_\nu' I_\nu = \varkappa_\nu' I_{\nu p}\ ^*. \tag{1}$$

Газодинамические величины (T, ρ и др.) являются функциями $\mathbf{r}$ и t. Интенсивность излучения I_ν ($\mathbf{r}$, Ω, ν, t) зависит от гораздо большего числа переменных. В наших работах [2, 3] описан метод эффективного учета зависимости от угловых переменных. Использование осреднений коэффициента поглощения по Планку, Росселанду [1] или их комбинаций [4, 5] позволяет заменить уравнение (1) одногрупповым. Однако использование таких осреднений обосновано лишь для оптически тонкого тела или когда излучение близко к равновесному. В остальных случаях сложная немонотонная зависимость коэффициента поглощения $\varkappa_\nu'$ от частоты приводит к необходимости пользоваться большим числом групп (подробной сеткой по ν).

Для задач, в которых физические величины не зависят от одной декартовой координаты, строится новое осредненное уравнение. Оно основано на точном решении, получающемся при а) $\varkappa_\nu'(\nu, T, \rho) = f_1(\nu)\cdot f_2(T, \rho)$. Это осреднение естественным образом переносится на случай б) $\varkappa_\nu' = f_1(\nu, T, \rho)\cdot f_2(T, \rho)$, где f_1 — слабо меняющаяся функция на расстояниях порядка длины свободного пробега. Это позволяет использовать предложенный метод в расчетах реальных задач при наличии в коэффициенте поглощения множителя, учитывающего переизлучение $(1 - e^{-h\nu/kT})$. Кроме требований а) и б) никаких других требований на f_1 и f_2, а также на оптическую толщину тела и на величину градиентов T, ρ не накладывается. Пользуясь конкретными физическими свойствами задачи, полученное осреднение удается применять при f_1, сильно меняющемся на расстояниях порядка длины свободного пробега.

2. Для плоского слоя в случае а) уравнение (1) заменяется на осредненное

$$\begin{gathered} z\frac{dI}{dx} = f_2\,(F\,(|z|,\ T) - I), \\ -\max_\nu f_1^{-1}(\nu) \leqslant z \leqslant \max_\nu f_1^{-1}(\nu), \end{gathered} \tag{2}$$

$F\,(|z|, T) = 2\pi \int\limits_{f_1^{-1}(\nu)\geqslant|z|} I_{\nu p}\cdot f_1^2(\nu)\,d\nu$, где интегрирование распространяется на те частоты, для которых $f_1^{-1}(\nu) \geqslant |z|$. (Способ интегрирования соответствует определению интеграла Лебега.) Для уравнения (2) используются граничные условия (на примере левого конца)

$$I\,(0,\ z) = 2\pi \int\limits_{f_1^{-1}(\nu)\geqslant z} I^+(0,\ z\cdot f_1(\nu),\ \nu)\cdot f_1^2(\nu)\,d\nu, \tag{3}$$

* Обозначения соответствуют работе [1].

где $I^+(0, \mu, \nu)$ — граничное условие для уравнения (1). Имеет место равенство

$$\int\limits_{-\max_\nu f_1^{-1}(\nu)}^{\max_\nu f_1^{-1}(\nu)} zIdz = \int\limits_0^\infty d\nu \int\limits_{-1}^{1} \mu I_\nu^* d\mu,$$

позволяющее находить поток энергии излучения из решения уравнения (2). Аналогичным образом можно написать уравнения для определения других интегральных величин.

Для двухмерной геометрии осредненно уравнение принимает вид

$$\gamma \frac{\partial I}{\partial s} = f_2(F(\gamma, T) - I), \qquad 0 \leqslant \gamma \leqslant \max_\nu f_1^{-1}(\nu), \tag{4}$$

где $\partial / \partial s$ — производная по направлению s в плоскости x, y,

$$F(\gamma, T) = 2 \int\limits_{f_1^{-1}(\nu) \geqslant \gamma} \frac{I_{\nu p} \cdot f_1^2(\nu)\, d\nu}{\sqrt{f_1^{-2}(\nu) - \gamma^2}}$$

с граничным условием

$$I(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \gamma) = 2 \int\limits_{f_1^{-1}(\nu) \geqslant \gamma} \frac{I^+(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \gamma \cdot f_1(\nu), \nu) \cdot f_1^2(\nu)\, d\nu}{\sqrt{f_1^{-2}(\nu) - \gamma^2}} \tag{5}$$

для $\mathbf{r}$ на границе тела, $\mathbf{s}$-направленных внутрь тела.

Вместо таблиц $\varkappa_\nu'(\nu, T, \rho)$ при расчете уравнений (2) и (4) необходимо применять таблицы $F(|z|, T)$ и $F(\gamma, T)$. Отметим, что F является монотонно убывающей функцией γ или $|z|$. Это позволяет даже при очень сложной спектральной зависимости $\varkappa_\nu'$ использовать грубые сетки по z и γ. Для решения уравнений (2) и (4) можно применять различные эффективные методы. В наших расчетах использовался квазидиффузионный метод [2, 3, 6].

3. В случае б) уравнения (2) и (4) сохраняют свой вид. Соответственно при этом $|z| \leqslant \max\limits_{x, \nu} f_1^{-1}(\nu, \rho, T)$, $\gamma \leqslant \max\limits_{x, y, \nu} f_1^{-1}(\nu, \rho, T)$,

$$F(|z|, T, \rho) = 2\pi \int\limits_{f_1^{-1}(\nu, T, \rho) \geqslant |z|} I_{\nu p} \cdot f_1^2(\nu, T, \rho)\, d\nu, \tag{6}$$

$$F(\gamma, T, \rho) = 2 \int\limits_{f_1^{-1}(\nu, T, \rho) \geqslant \gamma} \frac{I_{\nu p} f_1^2(\nu, T, \rho)\, d\nu}{\sqrt{f_1^{-2} - \gamma^2}}. \tag{7}$$

В случае, когда $f_1(\nu, T, \rho)$ сильно меняется на расстояниях порядка длины свободного пробега, расчет потока по уравнениям (2) и (4) дает основную ошибку в холодных зонах, прогреваемых излучением из горячих зон. В ряде задач для получения интересующих результатов этим явлением можно пренебречь и использовать уравнения (2) и (4), несмотря на отсутствие разделения переменных в $\varkappa_\nu'(\nu, T, \rho)$.

4. В качестве примера рассмотрим задачу о выходе излучения из плоского слоя с температурой $T = 1$ при $0 \leqslant x \leqslant 0{,}015$, $T = 2$ при $0{,}015 \leqslant x \leqslant 0{,}03$ в интервале частот $\nu \in (2;\ 4,\ 4)$. Коэффициент поглощения зададим формулой $\varkappa_\nu' = f_1(\nu) \cdot T$, $f_1(\nu) = 100$ при $3 \leqslant \nu \leqslant 3,\ 2$, $f_1(\nu) = 1$ для остальных ν. С помощью очень подробной сетки находим поток

W_T («точное решение»). Пользуясь осреднением по Планку и Росселанду, находим соответственно $W_П$ и $W_Р$. Из приведенного выше осредненного уравнения находим W. Сравнение всех потоков приводится на рис. 1.

В качестве второго примера рассмотрим задачу о падении излучения на плоский слой вещества ([3], [7], [8]). Без учета фазового перехода процесс

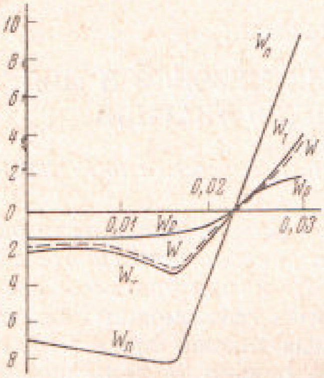

Рис. 1

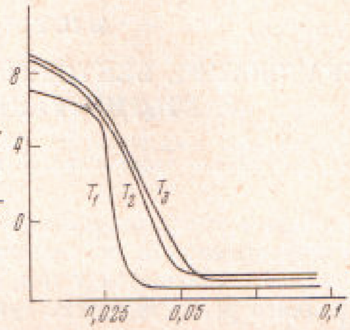

Рис. 2

описывается уравнениями радиационной газовой динамики. Перенос излучения описывается (1). При заданном законе падающего излучения рассчитывалась задача в одногрупповом T_1 и пятигрупповом приближении T_2 ([3]) (рис. 2). Пересчет задачи с помощью осредненного уравнения (2) T_3 (коэффициент поглощения, соответствующий пятигрупповому приближению, рассматривался в качестве точного) с хорошей точностью воспроизвел результаты пятигруппового расчета. При этом разделение (а) нарушалось за счет множителя переизлучения.

Авторы выражают благодарность Д. А. Гольдиной за составление программ и выполнение расчетов.

Институт прикладной математики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
3 IV 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер, Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений, М., 1966. [2] В. Я. Гольдин и др., Сборн. Вычислительные методы в теории переноса, 1969, стр. 50. [3] В. Я. Гольдин, Б. Н. Четверушкин, Методы расчета переноса излучения в одномерных задачах низкотемпературной плазмы, М., препринт ИМП, 1970. [4] D. H. Sampson, J. Quant. Spectr. Radiative Transfer, 5, 211 (1965). [5] А. Т. Онуфриев, В. Г. Севостьяненко, Журн. прикл. мех. и техн. физ., № 2, 17 (1968). [6] В. Я. Гольдин, Журн. вычислит. матем. и матем. физики, 4, № 6, 1078 (1964). [7] В. М. Кроль, И. В. Немчинов, Журн. прикл. мех. и техн. физ., № 5, 32 (1968). [8] П. П. Волосевич, Е. И. Леванов, ДАН, 194, № 1 (1970).