Доклады Академии наук СССР
1970. Том 195, № 2

УДК 518:517.944/.947 *МАТЕМАТИКА*

А. В. ГУЛИН

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 27 IV 1970)

1. В работе получены априорные оценки и достаточные условия устойчивости по правой части для трехслойных разностных схем, определяемых как операторно-разностное уравнение

$$B_2 y^{n+2} + B_1 y^{n+1} + B_0 y^n = \varphi^n, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{1}$$

где B_α — линейные операторы, действующие в линейном нормированном пространстве H, $y^n \in H$, $\varphi^n \in H$. Предполагается, что заданы начальные значения $y^0, y^1 \in H$ и что оператор B_2^{-1} существует.

Вводя сетку $\omega_\tau = \{t_n = n\tau,\ n = 0, 1, \ldots, \tau > 0\}$, запишем уравнение (1) в канонической форме (см. [1])

$$By_{\overset{\circ}{t}} + \tau^2 R y_{\bar{t}t} + Ay = \varphi^n, \quad n = 0, 1, \ldots, y^0, y_1 \in H, \tag{2}$$

где $y = y^{n+1} = y(t_{n+1})$, $y_{\overset{\circ}{t}} = (y^{n+2} - y^n)/(2\tau)$, $y_{\bar{t}t} = (y^{n+2} - 2y^{n+1} + y^n)/\tau^2$,

$$A = B_2 + B_1 + B_0, \quad R = 0{,}5(B_2 + B_0), \quad B = \tau(B_2 - B_0).$$

Исследование устойчивости схемы (2) было проведено в работах А. А. Самарского [1,2] с помощью метода энергетических неравенств. Оценки, полученные в настоящей работе, основаны на сведении (2) к эквивалентной двухслойной схеме и использовании метода выделения стационарных неоднородностей [4]. Это позволило упростить априорные оценки и освободиться от некоторых ограничений, присущих методу энергетических неравенств. Кроме того, получен ряд новых оценок.

2. Будем предполагать, что H — гильбертово пространство (вещественное или комплексное), в котором определены скалярное произведение (y, v) и норма $\|y\| = \sqrt{(y, y)}$.

Оператор $A: H \to H$ называется неотрицательным ($A \geqslant 0$), если $(Ax, x) \geqslant 0$ для всех $x \in H$, положительным ($A > 0$), если $(Ax, x) > 0$ для всех $0 \neq x \in H$. Если $A^* = A > 0$, то можно ввести пространство H_A, состоящее из элементов $y, v, \ldots, \in H$, со скалярным произведением $(y, v)_A = (Ay, v)$ и нормой $\|y\|_A = \sqrt{(Ay, y)}$.

Кроме основного пространства H, будем рассматривать пространство $H^2 = H \times H$, элементами которого являются векторы $x = \{x^1, x^2\}$, $x^\alpha \in H$, сложение и умножение на число определены покоординатно, а скалярное произведение и норма заданы следующим образом:

$$(y, v) = (y^1, v^1) + (y^2, v^2), \quad \|y\| = \sqrt{(y, y)}, \quad y = \{y^1, y^2\},$$
$$v = \{v^1, v^2\}.$$

Оператор $C = (C_{\alpha\beta}): H^2 \to H^2$ определяется как матрица с элементами $C_{\alpha\beta}: H \to H$, т. е.

$$Cx = \{C_{11}x^1 + C_{12}x^2,\ C_{21}x^1 + C_{22}x^2\}, \quad C = (C_{\alpha\beta}), \quad x = \{x^1, x^2\}.$$

Представим схему (2) в виде двухслойной схемы в пространстве H^2

$$y_{n+1} = Sy_n + \varphi_n, \quad n = 0, 1, \ldots, \quad y_0 = \{y^0, y^1\} \in H^2, \tag{3}$$

где $y_n = \{y^n, y^{n+1}\}$, $\varphi_n = \{0, B_2^{-1}\varphi^n\}$, $S = (S_{\alpha\beta})$,

$$S_{11}=0,\quad S_{12}=E,\quad S_{21}=-B_2^{-1}B_0,\quad S_{22}=-B_2^{-1}B_1, \tag{4}$$
$$B_2 = B/(2\tau)+R,\quad B_1 = A-2R,\quad B_0=-B/(2\tau)+R. \tag{5}$$

Используя методы работы ([5]), можно показать, что справедлива следующая

Лемма. *Пусть заданы операторы A, B, R: $H\to H$, причем A и R — самосопряженные операторы. Определим оператор $S=(S_{\alpha\beta})$ с компонентами (4) и оператор $D=(D_{\alpha\beta})$ с компонентами*

$$D_{11}=D_{22}=R,\quad D_{12}=D_{21}=0{,}5A-R. \tag{6}$$

Тогда, если выполнены операторные неравенства

$$A>0,\quad 4R-A\geqslant 0,\quad \operatorname{Re}B=0{,}5(B+B^*)\geqslant 0, \tag{7}$$

то D — неотрицательный в H^2 оператор и при любом $x=\{x^1,\ x^2\}\in H^2$ справедлива оценка

$$\|Sx\|_D\leqslant \|x\|_D, \tag{8}$$

где $\|x\|_D^2=(Dx,x)={}^1/_4\|x^2+x^1\|_A^2+\|x^2-x^1\|^2_{R-{}^1/_4A}$.

В дальнейшем будем предполагать, что операторы $A=A(t_n)$ и $4R-A=4R(t_n)-A(t_n)$ удовлетворяют следующим условиям Липшица по t:

$$(1-c_1\tau)A(t_{n-1})\leqslant A(t_n)\leqslant (1+c_1\tau)A(t_{n-1}),\ n=1,\ 2,\ldots,$$
$$4R(t_n)-A(t_n)\leqslant (1+c_1\tau)(4R(t_{n-1})-A(t_{n-1})), \tag{9}$$

где $c_1>0$ — постоянная, не зависящая от τ и n.

3. Покажем теперь, что условия (7), (9) обеспечивают устойчивость схемы (2) по правой части.

Теорема 1. *Пусть в схеме (2) $A(t_n)$ и $R(t_n)$ — самосопряженные операторы, удовлетворяющие условиям Липшица (9). Если при каждом n выполнены условия устойчивости (7), то для решения задачи (2) справедлива оценка*

$$\|y_{n+1}\|_{D(t_n)}\leqslant\rho_1^n(\|y_0\|_{D(0)}+\|\varphi^0\|_{A^{-1}(0)})+\|\varphi^n\|_{A^{-1}(t_n)}+$$
$$+\sum_{n'=1}^{n}\tau\rho_1^{n-n'}[\|\varphi_{\bar t}^{n'}\|_{A^{-1}(t_{n'})}+c_1\|\varphi^{n'-1}\|_{A^{-1}(t_{n'})}], \tag{10}$$

где $\rho_1=\sqrt{1+c_1\tau}$, $\|\varphi\|^2_{A^{-1}}=(A^{-1}\varphi,\varphi)$, $\varphi_{\bar t}=(\varphi^n-\varphi^{n-1})/\tau$,

$$\|y_{n+1}\|^2_{D(t_n)}={}^1/_4\|y^{n+1}+y^n\|^2_{A(t_n)}+\|y^{n+1}-y^n\|^2_{R(t_n)-{}^1/_4A(t_n)}. \tag{11}$$

Доказательство. Представим решение задачи (3) в виде суммы

$$y_n=v_n+w_n,\quad n=0,1,\ldots, \tag{12}$$

где функции w_n и v_n удовлетворяют уравнениям

$$(E-S(t_n))w_{n+1}=\varphi_n,\quad n=0,1,\ldots,\quad w_0=w_1, \tag{13}$$
$$v_{n+1}=S(t_n)v_n+S(t_n)(w_{n+1}-w_n),\quad n=0,1,\ldots,\quad v_0=y_0-w_1. \tag{14}$$

Используя приведенную в пункте 2 лемму, убеждаемся в справедливости оценки

$$\|v_{n+1}\|_{D(t_n)}\leqslant\|S(t_n)v_n\|_{D(t_n)}+\|S(t_n)(w_{n+1}-w_n)\|_{D(t_n)}\leqslant$$
$$\leqslant\|v_n\|_{D(t_n)}+\|w_{n+1}-w_n\|_{D(t_n)}.$$

Далее, учитывая условия Липшица (9), получим

$$\|v_n\|_{D(t_n)}\leqslant\rho_1\|v_n\|_{D(t_{n-1})},\quad n=1,2,\ldots,\quad \rho_1=\sqrt{(1+c_1\tau)},$$

так что

$$\|v_{n+1}\|_{D(t_n)} \leqslant \rho_1 \|v_n\|_{D(t_{n-1})} + \|w_{n+1} - w_n\|_{D(t_n)}.$$

Решением уравнения (13) является вектор

$$w_{n+1} = \{A^{-1}(t_n)\varphi^n, A^{-1}(t_n)\varphi^n\}$$

и, следовательно,

$$w_{n+1} - w_n = \tau\{(A^{-1}\varphi^n)_{\bar{t}}, (A^{-1}\varphi^n)_{\bar{t}}\}.$$

Элементарный подсчет показывает, что

$$\|w_{n+1} - w_n\|_{D(t_n)} = \tau\|(A^{-1}(t_n)\varphi^n)_{\bar{t}}\|_{A(t_n)}.$$

Воспользуемся теперь следующей оценкой, полученной в [4]:

$$\|(A^{-1}\varphi^n)_{\bar{t}}\|_{A(t_n)} \leqslant \|\varphi^n_{\bar{t}}\|_{A^{-1}(t_n)} + c_1\|\varphi^{n-1}\|_{A^{-1}(t_n)}.$$

Таким образом, для решения задачи (14) справедлива оценка

$$\|v_{n+1}\|_{D(t_n)} \leqslant \rho_1 \|v_n\|_{D(t_{n-1})} + \tau[\|\varphi^n_{\bar{t}}\|_{A^{-1}(t_n)} + c_1\|\varphi^{n-1}\|_{A^{-1}(t_n)}],$$

откуда получаем

$$\|v_{n+1}\|_{D(t_n)} \leqslant \rho_1^n \|v_0\|_{D(0)} + \sum_{n'=1}^{n} \tau\rho_1^{n-n'}[\|\varphi^{n'}_{\bar{t}}\|_{A^{-1}(t_{n'})} + c_1\|\varphi^{n'-1}\|_{A^{-1}(t_{n'})}].$$

Наконец, из неравенства

$$\|y_{n+1}\|_{D(t_n)} \leqslant \|w_{n+1}\|_{D(t_n)} + \|v_{n+1}\|_{D(t_n)} = \|\varphi^n\|_{A^{-1}(t_n)} + \|v_{n+1}\|_{D(t_n)},$$

учитывая, что

$$\|v_0\|_{D(0)} \leqslant \|y_0\|_{D(0)} + \|\varphi^0\|_{A^{-1}(0)},$$

получим (10).

4. В [5] были получены более общие, чем (7), необходимые и достаточные условия устойчивости схемы (2) по начальным данным. Можно показать, что условия работы [5] обеспечивают устойчивость схемы (2) и по правой части. Точнее, имеет место

Теорема 2. *Пусть операторы A, B, R схемы* (2) — *самосопряженные и не зависят от n. Тогда, если выполнены условия устойчивости*

$$\tilde{A} = \frac{\rho^2-1}{2\tau\rho}B + \frac{(1-\rho)^2}{\rho}R + A > 0,$$

$$4\tilde{R} - \tilde{A} = \frac{\rho^2-1}{2\tau\rho}B + \frac{(1+\rho)^2}{\rho}R - A \geqslant 0,$$

$$\frac{1}{\tau}\tilde{B} = \frac{\rho^2+1}{2\tau}B + (\rho^2-1)R \geqslant 0,$$

с постоянной $\rho > 0$, то для решения задачи (2) *справедлива оценка*

$$\|y_{n+1}\|_D \leqslant \rho^{n+1}(\|y_0\|_D + \|\varphi^0\|_{\tilde{A}^{-1}}) + \rho\|\varphi^n\|_{\tilde{A}^{-1}} + \sum_{n'=1}^{n} \rho^{n+1-n'}\|\varphi^{n'} - \rho\varphi^{n'-1}\|_{\tilde{A}^{-1}}, \qquad (15)$$

где

$$\|y_n\|^2_D = {}^1/_4\|y^{n+1} + \rho y^n\|^2_{\tilde{A}} + \|y^{n+1} - \rho y^n\|^2_{\tilde{R} - {}^1/_4\tilde{A}}.$$

Доказательство лишь технически усложняется по сравнению с теоремой 1, поэтому мы не будем его приводить.

Оценка (15), справедливая при любом $\rho > 0$, является довольно громоздкой из-за того, что норма $\|y_n\|_D$ зависит от ρ. При $\rho \geqslant 1$ можно получить достаточные условия устойчивости в более простой норме (11). Для этого запишем (2) в виде двухслойной схемы

$$\mathscr{B}y_t + \mathscr{A}y = \varphi_n, \qquad (16)$$

где $y = y_n = \{0{,}5(y^{n+1} + y^n),\ y^{n+1} - y^n\}$, $y_t = (y_{n+1} - y_n)/\tau$, $\varphi_n = \{\varphi^n, 0\}$,

$$\mathscr{A} = (\mathscr{A}_{\alpha\beta}), \quad \mathscr{B} = (\mathscr{B}_{\alpha\beta}),$$

$$\mathscr{A}_{11} = A, \quad \mathscr{A}_{12} = \mathscr{A}_{21} = 0, \quad \mathscr{A}_{22} = R - {}^1/_4 A,$$

$$\mathscr{B}_{11} = B + 0{,}5\tau A, \quad \mathscr{B}_{12} = -\mathscr{B}_{21} = 2\mathscr{B}_{22} = \tau(R - {}^1/_4 A).$$

Такое представление позволяет непосредственно применить некоторые теоремы об устойчивости двухслойных схем ([3, 4]) к трехслойной схеме (2).

Так, применяя к (16) теорему 3 работы ([4]), нетрудно показать, что справедлива

Теорема 3. *Пусть в схеме* (2) *операторы* A *и* R — *самосопряженные, выполнены условия Липшица* (9) *и операторные неравенства*

$$A > 0, \quad R - {}^1/_4 A > 0, \quad \operatorname{Re} B + {}^1/_2 \tau \frac{\rho - 1}{\rho + 1} A \geqslant 0, \quad \rho \geqslant 1. \tag{17}$$

Тогда для решения задачи (2) *справедлива оценка*

$$\|y_{n+1}\|_{D(t_n)} \leqslant \tilde{\rho}^{n+1} (\|y_0\|_{D(0)} + \|\varphi^0\|_{A^{-1}(0)}) + \|\varphi^n\|_{A^{-1}(t_n)} + $$
$$+ \sum_{n'=1}^{n} \tau \tilde{\rho}^{n+1-n'} [\|\varphi_t^{n'}\|_{A^{-1}(t_{n'})} + c_1 \|\varphi^{n'-1}\|_{A^{-1}(t_{n'})}], \tag{18}$$

где норма $\|y_{n+1}\|_{D(t_n)}$ *определена выражением* (11), $\tilde{\rho} = \rho\sqrt{1 + c_1\tau}$.

В заключение выражаю искреннюю благодарность А. А. Самарскому за постановку задачи и ценные советы.

Институт прикладной математики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
10 IV 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Самарский, Журн. вычислит. матем. и матем. физики, 7, № 1, 62 (1967). [2] А. А. Самарский, Там же, 7, № 5, 1096 (1967). [3] А. А. Самарский, ДАН, 181, № 4, 808 (1968). [4] А. А Самарский, А. В. Гулин, ДАН, 192, № 2 (1970). [5] А. В. Гулин, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 8, № 4, 899 (1968).

309429

Гомельский государственный университет
БИБЛИОТЕКА