

В. В. СЛУХАЕВ

К ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

(Представлено академиком А. Д. Александровым 24 VI 1970)

1°. В работе находятся условия, при которых поле единичных векторов может служить полем направлений скорости для стационарного баротропного движения идеальной жидкости. Если такие условия известны, то можно решить задачу о возможности движения с заданным распределением линий тока. Если движение с заданным полем $\mathbf{n}$ направлений скорости возможно, то к полю можно присоединить два скалярных поля V (модуль скорости) и ρ (плотность) таким образом, что поле скоростей $\mathbf{v} = V\mathbf{n}$ и поле плотностей будут удовлетворять уравнению Эйлера и уравнению неразрывности. Баротропность движения означает, что плотность является функцией только давления. Геометрически это приводит к тому, что поле ускорений должно быть потенциальным (в предположении, что потенциальным является поле внешних сил) (1).

2°. Для формулировки результатов необходимо рассмотреть векторное поле $\mathbf{k}$ и скалярные поля z и H , определенные в той же области, что и поле $\mathbf{n}$. Вектор $\mathbf{k}$ — это вектор кривизны векторной линии поля $\mathbf{n}$ (линии тока). Далее всюду предполагается, что $\mathbf{k} \neq 0$. Этим исключаются из рассмотрения векторные поля, у которых все линии тока прямые. Скаляр $z = (\mathbf{n}, \text{rot } \mathbf{n})$ — это скаляр неголономности (2) поля $\mathbf{n}$. Если $z = 0$, то поле называется голономным, а в противном случае — неголономным. Поле является голономным тогда и только тогда, когда существует семейство поверхностей таких, что в каждой точке вектор поля направлен по нормали к поверхности семейства, проходящей через эту точку. Скаляр $H = \text{div } \mathbf{n}$ называется средней кривизной (3) поля $\mathbf{n}$. Если $H = 0$, то поле называется минимальным.

3°. Известно (4), что если поле $\mathbf{n}$ голономное, то оно может служить полем направлений скорости для потенциального баротропного движения. Этот результат может быть уточнен.

Теорема 1. Если поле $\mathbf{n}$ голономное, а поле $\mathbf{k}$ неголономное, то возможно только потенциальное движение с полем $\mathbf{n}$ направлений скорости. Если же поля $\mathbf{n}$ и $\mathbf{k}$ голономные, то кроме потенциального возможно вихревое движение, у которого $\text{rot } \mathbf{v}$ параллелен $\mathbf{k}$. В первом случае модуль скорости V определяется (при заданном поле $\mathbf{n}$) с произволом в одну функцию одного аргумента, а во втором — с произволом в две функции одного аргумента.

Рассмотрим далее движения, у которых линии тока изотаксические, т. е. модуль скорости остается постоянным вдоль каждой линии тока, меняясь только при переходе от одной линии тока к другой.

Теорема 2. Стационарное баротропное движение идеальной жидкости с заданным полем $\mathbf{n}$ направлений скорости и изотаксическими линиями тока возможно тогда и только тогда, когда $[\text{rot } \mathbf{k}, \mathbf{n}] = 0$. Единичные векторные поля, удовлетворяющие этому условию, существуют и определяют с произволом в четыре функции двух аргументов. При заданном поле $\mathbf{n}$ модуль скорости определяется с произволом в одну функцию одного аргумента.

Первое из утверждений этой теоремы следует из результатов Г. Георгиева (4).

Теорема 3. Если поле $\mathbf{n}$ неголономное и $[\text{rot } \mathbf{k}, \mathbf{n}] = 0$, то оно может служить полем направлений скорости только для движений с изотаксическими линиями тока. Если же поле $\mathbf{n}$ голономное, то для того чтобы оно могло служить полем направлений скорости для движения с изотаксическими линиями тока, необходимо и достаточно, чтобы $\text{rot } \mathbf{k} = 0$.

Для того чтобы решить вопрос о возможности движения с неголономным полем направлений скорости, рассмотрим величину $u = (\mathbf{n}, \text{grad } \ln V)$. Будем считать, что $u \neq 0$, так как иначе получится движение с изотаксическими линиями тока, которое уже рассмотрено. Следующая теорема решает вопрос о возможности движения с заданным полем $\mathbf{n}$ (безразлично — голономным или нет) и заданной функцией u .

Теорема 4. Стационарное баротропное движение идеальной жидкости с заданным полем $\mathbf{n}$ направлений скорости и заданной функцией u возможно тогда и только тогда, когда

- а) поле векторов $\mathbf{i} = \mathbf{k} + u\mathbf{n}$ голономное,
- б) поле векторов $\mathbf{I} = \mathbf{i} + u^{-1}[\text{rot } \mathbf{i}, \mathbf{n}]$ потенциальное.

При выполнении этих условий $\text{grad } \ln V = \mathbf{I}u$, следовательно, поле скоростей $\mathbf{v}$ определяется единственным образом (с точностью до постоянного множителя).

Из теоремы 1 следует, что для голономных полей $\mathbf{n}$ функцию u можно задать не единственным образом, а из теоремы 3 следует, что для неголономного поля $\mathbf{n}$, удовлетворяющих условию $[\text{rot } \mathbf{k}, \mathbf{n}] = 0$, функция u всегда равна нулю.

Теорема 5. Пусть даны два движения с одним и тем же неголономным полем $\mathbf{n}$ направлений скорости. Тогда, если $[\text{rot } \mathbf{k}, \mathbf{n}] \neq 0$, то векторные поля скоростей этих движений отличаются только постоянным множителем.

Эта теорема (так же, как и теорема 3) вытекает из следующей леммы.

Лемма 1. Если поле $\mathbf{n}$ направлений скорости стационарного баротропного движения идеальной жидкости неголономное, то функция u является корнем уравнения $A + uB = 0$, где A и B — инварианты поля $\mathbf{n}$.

Коэффициенты A и B могут быть вычислены, если поле $\mathbf{n}$ задано. Формулы для вычисления A и B здесь не приводятся из-за недостатка места. В принципе эти формулы (вместе с теоремой 4) позволяют ответить на вопрос, каким условиям должно удовлетворять неголономное поле единичных векторов, для того чтобы оно могло служить полем направлений скорости.

4°. Движения идеального газа отличаются от движений идеальной жидкости тем, что можно пренебречь внешними силами. Это приводит к ряду дополнительных условий возможности движения. Прежде всего заметим, что для числа Маха справедлива

Теорема 6. Для стационарных баротропных движений идеального газа с полем направлений скорости, удовлетворяющем условию $[\text{rot } \mathbf{k}, \mathbf{n}] = 0$, числом Маха может служить любая функция, постоянная на поверхностях, ортогональных полю $\mathbf{k}$. Для движений, у которых $[\text{rot } \mathbf{k}, \mathbf{n}] \neq 0$, число Маха M определяется формулой $M^2 = 1 + u^{-1}H$.

Отсюда следует, что для движений с $[\text{rot } \mathbf{k}, \mathbf{n}] = 0$ зависимость плотности от давления может быть произвольной, а для движений с $[\text{rot } \mathbf{k}, \mathbf{n}] \neq 0$ эта зависимость определяется единственным образом, если заданы $\mathbf{n}$ и u . Если же поле $\mathbf{n}$ неголономное, то с помощью теоремы 5 получаем, что не только модуль скорости, но и плотность определяются единственным образом по известным линиям тока. Далее можно получить специализацию теорем 2 и 4 для движений идеального газа.

Теорема 7. Стационарное баротропное движение идеального газа с заданным полем $\mathbf{n}$ направлений скорости и изотаксическими линиями тока возможно тогда и только тогда, когда поле $\mathbf{n}$ минимальное и $[\text{rot } \mathbf{k}, \mathbf{n}] = 0$.

Теорема 8. Стационарное баротропное движение идеального газа с заданным полем $\mathbf{n}$ направлений скорости и заданной функцией $u \neq 0$ воз-

можно тогда и только тогда, когда векторное поле $\mathbf{i}$ голономное, а векторные поля $\mathbf{I}$ и $\mathbf{J} = M^2 \mathbf{i}$ — потенциальные. При этом $\text{grad} \ln V = \mathbf{I}$, а $\text{grad} \ln \rho = \mathbf{J}$.

5°. Примерами приложения изложенных выше результатов служат следующие теоремы.

Теорема 9. Возможны только три класса критических ($M=1$) баротропных стационарных движений идеального газа:

1) потенциальное движение, ортогональное семейству минимальных поверхностей;

2) винтовое движение, у которого поле направлений скорости минимальное;

3) движение с изотаксическими линиями тока. Поле $\mathbf{n}$ направлений скорости минимальное и $\text{rot} \mathbf{k} = 0$.

В первых двух случаях зависимость плотности ρ от давления p имеет вид $p = \beta^* - \beta^2 \rho^{-1}$ (газ Чаплыгина). Здесь β и β^* — константы. В третьем случае зависимость $p = p(\rho)$ произвольная.

Теорема 10. Возможно движение идеального газа, у которого линии тока являются винтовыми линиями, лежащими на семействе круговых цилиндров с общей осью, причем на каждом отдельно взятом цилиндре винтовые линии конгруэнтны. Кривизна линии тока, модуль скорости, плотность и давление могут быть произвольными функциями от радиуса цилиндра.

И, наконец, заметим, что для движений идеальной несжимаемой жидкости $\mathbf{u} = -\mathbf{H}$ и из теоремы 4 следуют результаты С. С. Бюшгенса (5).

6°. Доказательства приведенных выше теорем получены исследованием совместности системы дифференциальных уравнений, определяющей произвольное единичное векторное поле, и системы уравнений гидродинамики, описывающей движение с заданным полем направлений скорости. Совместность исследуется методом внешних форм Картана (6), а все системы дифференциальных уравнений записываются в подвижном репере.

Если в качестве подвижного репера области, в которой задано поле $\mathbf{n}$, выбрать декартов репер $\{\mathbf{r}, \mathbf{e}_i\}$ ($i, j = 1, 2, 3$), у которого $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки; $\mathbf{e}_3 = \mathbf{n}$, $\mathbf{e}_2 = |\mathbf{k}|^{-1} \mathbf{k}$, $\mathbf{e}_1 = [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$, то поле $\mathbf{n}$ определяется уравнениями

$$\omega_3^2 = a_i \omega^i, \quad \omega_3^4 = b_i \omega^i, \quad \omega_1^2 = c_i \omega^i \quad (b_3 = 0), \quad (1)$$

причем внешние дифференциалы форм ω^i , ω^j определяются из уравнений структуры евклидова пространства (6). Если поле $\mathbf{n}$ может служить полем направлений скорости для стационарного баротропного движения, то должны существовать скаляры V и ρ такие, что удовлетворяются уравнение Эйлера и уравнение неразрывности. Эти уравнения, вместе с разложением dV по базисным формам ω^i можно представить в виде системы уравнений в полных дифференциалах

$$d\varphi = V^2 a_3 \omega^3 + V V_3 \omega^3,$$

$$d\rho = \rho_1 \omega^1 + \rho_2 \omega^2 - \rho V^{-1} (V\mathbf{H} + V_3) \omega^3, \quad (2)$$

$$dV = V_i \omega^i.$$

Здесь φ — потенциал ускорения. Считая заданным поле $\mathbf{n}$, получим, что неизвестными функциями в системе (2) являются φ , ρ , V , ρ_1 , ρ_2 , V_1 , V_2 , V_3 . Результаты 3° получаются исследованием системы (2) на инволюцию (6) относительно этих неизвестных функций. Особое место занимает теорема 4, в которой функция и считается заданной. Первое и третье уравнение системы (2) можно привести к виду $d\varphi = V^2 \theta$, $dV = \Theta$, где $\theta = (\mathbf{i}, d\mathbf{r})$, а $\Theta = (\mathbf{I}, d\mathbf{r})$. Отсюда и следует утверждение теоремы. Доказательство леммы 1 следует из того, что если поле $\mathbf{n}$ не голономное, то система (2) не в инволюции. Сделав два продолжения (6) этой системы, получаем уравнение $A + uB = 0$, где A и B являются функциями коэффициентов a_i , b_i , c_i и их производных. Результаты 4° получаются из того, что при равенстве нулю

поля внешних сил имеем $\rho = \rho(\varphi)$ и второе уравнение системы (2) принимает вид $d\rho = \rho M^2 \theta$.

Отметим также, что метод исследования сходен с применяемым в теории дифференциальных уравнений методом дифференциальных связей (⁷), только роль основной системы играет система (1), а дифференциальные связи задаются системой (2).

Томский государственный университет
им. В. В. Куйбышева

Поступило
15 VI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Н. Е. Кочкин, И. А. Кибель, Н. В. Розе, Теоретическая гидромеханика, 1, М., 1963. ² В. В. Вагнер, Математич. сборн., 4 (46), № 2, 339 (1938). ³ С. С. Бюшгенс, Изв. АН СССР, матем., 10, № 1, 73 (1946). ⁴ Gh. Gheorghiev, Acad. R. P. Romania, Studii și cercetări, Stiin. matem., 8, № 2, 157 (1957). ⁵ С. С. Бюшгенс, ДАН, 84, № 5, 861 (1952). ⁶ С. П. Фиников, Метод внешних форм Картана, М., 1948. ⁷ Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко, Системы квазилинейных уравнений, М., 1969.