Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 3

УДК 517.5 МАТЕМАТИКА

П. Е. СОБОЛЕВСКИЙ

О ПОЛУГРУППАХ РОСТА α

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 16 VI 1970)

В [1,2] исследован класс действующих в банаховом пространстве E сильно непрерывных при $t > 0$ полугрупп $T(t)$, полугрупп роста α, норма которых удовлетворяет неравенству

$$\|T(t)\| \leqslant c \cdot \exp\{\omega t\} \cdot t^{-\alpha} \tag{1}$$

при некоторых $c > 0$, $-\infty < \omega < +\infty$ и целом $\alpha > 0$.

Установлено характеристическое свойство инфинитезимального оператора $T'(0)$ таких полугрупп в терминах его резольвенты степени α, обобщающее известной критерий для сильно непрерывных при $t \geqslant 0$ полугрупп. В данной статье предполагается другой способ исследования роста α, пригодный в случае произвольного $\alpha > 0$. Характеристическое свойство оператора $T'(0)$ устанавливается в терминах его резольвенты.

1. Обозначим через $D_n[T'(0)]$ область определения оператора $[T'(0)]^n$ при любом целом $n > 0$ и через $D_\infty[T'(0)]$ — множество $\bigcap\limits_1^\infty D_n[T'(0)]$. Как известно [3], $D_\infty[T'(0)]$ плотно в E. Можно показать, что оператор $\lambda I - T'(0)$, суженный на $D_\infty[T'(0)]$, при любом комплексном λ с $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ имеет алгебраический обратный $R[\lambda, T'(0)]$ и справедливы формулы

$$R^n[\lambda, T'(0)]\,x = [(n-1)!]^{-1} \int\limits_0^\infty t^{n-1} \exp\{-\lambda t\}\, T(t)\, x\, dt$$
$$(x \in D_\infty[T'(0)],\ n = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

В дальнейшем не ограничивая общности будем считать, что $\omega < 0$. Тогда определен (на $D_\infty[T'(0)]$) оператор $[T'(0)]^{-1}$.

Теорема 1. *Для любого целого $n > \alpha$ справедливо неравенство*

$$\|T(t)x\| \leqslant c(n) \exp\{\omega t\} \|[T'(0)]^n x\| \quad (x \in D_\infty[T'(0)]). \tag{3}$$

Для доказательства (3) следует воспользоваться тождеством

$$T(t)\,x = [I - T(\tau - t)]^{-1} \int\limits_\tau^t T(s)\, T'(0)\, x\, ds$$

при достаточно большом $\tau - t > 0$.

Из (2) и (3) следует, что при любых целых $m > 0$, $n > \alpha$, комплексных λ с $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ справедливы неравенства

$$\|R^m[\lambda, T'(0)]x\| \leqslant c(n) [\operatorname{Re}\lambda - \omega]^{-m} \|[T'(0)]^n x\| . \tag{4}$$

Наконец, из (1) и (2) при любых целых $m > \alpha$ и комплексных λ с $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ вытекает неравенство

$$\|R^m[\lambda, T'(0)]x\| \leqslant c[\operatorname{Re}\lambda - \omega]^{\alpha - m} m^{-\alpha} \|x\|, \tag{5}$$

обобщающее известное неравенство для сильно непрерывных при $t \geqslant 0$ полугрупп.

2. Возникает вопрос, насколько перечисленные выше свойства определяют инфинитезимальный оператор некоторой полугруппы роста α.

Теорема 2. *Пусть A — действующий в банаховом пространстве E линейный оператор, переводящий некоторое плотное в E множество D_∞ в себя. Пусть для некоторой последовательности комплексных чисел $\{\lambda_k\}$ таких, что $\operatorname{Re}\lambda_k > \omega$, $\operatorname{Re}\lambda_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$, $\lambda_1 = 0$, операторы $\lambda_k I - A$ имеют на (D_∞) алгебраические обратные $R(\lambda_k)$. Пусть для любого $x \in D_\infty$ и для любого $\lambda = \lambda_k$ справедливы неравенства (4) и (5) с заменой $T'(0)$ на A. Тогда $D_\infty[T'(0)] \supset D_\infty$ для некоторой полугруппы $T(t)$ роста α, и для любого $x \in D_\infty$ справедливы тождества*

$$T'(0)x = Ax, \quad R(\lambda_k)x = R[\lambda_k, T'(0)]x. \tag{6}$$

Если условия теоремы выполнены для любого λ_k с $\operatorname{Re}\lambda_k > \omega$, то полугруппа $T(t)$, удовлетворяющая (6), единственна.

3. Наметим схему доказательства теоремы 2. Для простоты предположим, что $\lambda_k = k - 1$, $k = 1, 2, \ldots$ и $\omega = 0$. Следуя ([3]), введем операторы $A_k = kAR(k)$. Из (4) следует, что они аппроксимируют на D_∞ оператор A. Далее определим на D_∞ оператор-функцию

$$\exp\{tA_k\}x = \sum_{m=0}^{\infty} [m!]^{-1} t^m A_k^m x. \tag{7}$$

Из неравенства (4) $(\omega = 0)$ вытекает, что ряд (7) сходится равномерно на каждом конечном отрезке $[0, t_0]$.

Лемма 1. *Для любых целых $n > \alpha$ имеют место неравенства*

$$\|\exp\{tA_k\}x\| \leqslant c(n)\|A^n x\|. \tag{8}$$

Лемма 2. *Для любых целых $n > \alpha$ и $r > \alpha$ справедливы неравенства*

$$\|\exp\{tA_k\}x\| \leqslant \exp\{-kt\} \sum_{m=0}^{r-1} [m!]^{-1} t^m k^m c(n) \|A^n x\| + c(1 + O_r) t^{-\alpha} \|x\|, \tag{9}$$

где $O_r \to 0$ при $r \to +\infty$.

Для доказательства воспользуемся тождеством

$$\exp\{tA_k\}x = \exp\{-tk\} \sum_{m=0}^{\infty} [m!]^{-1} t^m k^{2m} R^m(k)\, x \tag{10}$$

и неравенствами (4) и (5). В итоге получим $(\omega = 0)$, что

$$\|\exp\{tA_k\}x\| \leqslant \exp\{-tk\} \sum_{m=0}^{r-1} [m!]^{-1} t^m k^m c(n) \|A^n x\| +$$

$$+ \exp\{-kt\} \sum_{m=r}^{\infty} [m!]^{-1} t^m k^{m+\alpha} m^{-\alpha} c \|x\| = J_1 + J_2.$$

Далее примем во внимание тождество

$$\int_0^k (k-z)^{\alpha-1} z^m dz = \Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(m+1) \cdot [\Gamma(m+1+\alpha)]^{-1} k^{m+\alpha},$$

откуда следует, что

$$k^{m+\alpha} m^{-\alpha} \leqslant (1 + O_r)\, [\Gamma(\alpha)]^{-1} \int_0^k (k-z)^{\alpha-1} z^m dz$$

при $m \geqslant r$. Поэтому

$$J_2 \leqslant \exp\{-kt\}(1 + O_r)\, [\Gamma(\alpha)]^{-1} \int_0^k (k-z)^{\alpha-1} \sum_{m=r}^{\infty} [m!]^{-1} t^m z^m dz \|x\| \leqslant$$

$$\leqslant (1 + O_r)\, [\Gamma(\alpha)]^{-1} \int_0^k (k-z)^{\alpha-1} \exp\{-t(k-z)\}\, dz \|x\| \leqslant (1 + O_r)\, t^{-\alpha} \|x\|.$$

Аппроксимирующие операторы $\exp\{tA_k\}$ неограничены, но как показывает лемма 2, эта неограниченность имеет конечный порядок и при $t > 0$ и $k \to \infty$ исчезает.

Далее доказательство проводится известно, хотя и несколько видоизмененным способом. Используется тождество для разности полугрупп

$$[\exp\{tA_k\} - \exp\{tA_r\}]\,x =$$
$$= \int_0^t \overline{\exp\{(t-s)\,A_k\}\,A^{-n}}\cdot\overline{\exp\{sA_r\}\,A^{-n}}\;ds\cdot(A_k - A_r)\,A^{2n}x. \qquad (11)$$

Черта сверху здесь означает замыкание оператора в E, которое, в силу (8), существует при $n > \alpha$. Отсюда и из (8) следует сходимость оператор-функций $\exp\{tA_k\}$ к пределу $T(t)$, равномерная на каждом конечном отрезке $[0, t_0]$. Из оценки (9) следует сильная непрерывность $T(t)$ при $t > 0$ и оценка (1). Далее, из полугруппового тождества

$$\overline{\exp\{tA_k\}A^{-n}}\cdot\exp\{\tau A_k\}A^n x = \exp\{(t+\tau)A_k\}\,x \qquad (12)$$

вытекает, что $T(t)$ — полугруппа. Наконец, из тождества

$$\exp\{tA_k\}\,x = x + \int_0^t \exp\{sA_k\}\,A_k x\,ds$$

следует, что $D_\infty[T'(0)] \supset D_\infty$ и на D_∞ имеет место

$$T'(0)\,x = Ax, \quad R[\lambda_k,\ T'(0)]\,x = R(\lambda_k)\,x. \qquad (13)$$

4. В недавно появившейся работе ([4]) изучен несколько отличный от ([1], [2]) класс полугрупп и установлено характеристическое свойство инфинитезимального оператора в терминах его резольвенты степени α. Было бы интересным попытаться установить характеристическое свойство инфинитезимального оператора в терминах его резольвенты, например, обобщив соответствующим образом развитый в данной статье метод.

Воронежский государственный университет
им. Ленинского комсомола

Поступило
25 V 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. Da Prato, C. R., **262** (1966). [2] G. Da Prato, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, **20** (1966). [3] Э. Хилле, Р. С. Филлипс, Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, 1962. [4] П. П. Забрейко, А. В. Зафиевский, ДАН, **189**, № 5 (1969).