

Рисунок 2 – Затухающая стоячая волна возмущения:  
а – период колебаний по координате  $y$ ; б – период колебаний по времени

### Литература

1. Васильев, В. А. Высокоскоростное затвердевание расплава: Теория, технология и материалы / В. А. Васильев, Б. С. Митин, И. Н. Пашков и др.; Под науч. ред. Б. С. Митина. – Москва: СП «Интермет инжиниринг», 1998. – 394 с.
2. Шабловский, О. Н. Кинетика роста вершины дендрита в глубоко переохлажденном расплаве. Часть 1. Уравнение фазовой границы кристаллизации / О. Н. Шабловский // Успехи прикладной физики. – 2013. – Т. 1, № 6. – С. 680–685.
3. Шабловский, О. Н. Кинетика роста вершины дендрита в глубоко переохлажденном расплаве. Часть II. Аналитическая структура возмущений линии роста / О. Н. Шабловский // Успехи прикладной физики. – 2014. – Т. 2, № 1. – С. 12–17.

**Е. Д. Головин**

(ГГУ имени Ф. Скорины, Гомель)

Науч. рук. **В. Н. Капшай**, канд. физ.-мат. наук, доцент

### ГЕНЕРАЦИЯ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ В ПОВЕРХНОСТНОМ СЛОЕ СТЕРЖНЕВИДНОЙ ЧАСТИЦЫ. ПРИБЛИЖЕНИЕ ВКБ

**Введение.** Генерация второй гармоники в поверхностных слоях малых centrosymmetric частиц была впервые продемонстрирована более тридцати лет назад. С помощью данного явления в настоящее время проводят изучение нелинейных оптических свойств таких частиц. Также оно используется для исследования физических и химических процессов, происходящих на поверхностях частиц малых размеров, и является уникальным инструментом исследования мембран биологических объектов. Это явление можно описать с помощью нескольких моделей: нелинейная модель Релея – Ганса – Дебая (РГД), нелинейная модель Вентцеля – Крамерса – Бриллюэна (ВКБ) и нелинейная модель на основе точного решения задачи Ми.

**Постановка задачи.** В данной работе с использованием приближения ВКБ теоретически получим формулу для вычисления напряжённости поля второй гармоники, генерируемого в нелинейном поверхностном слое. Пусть на цилиндрическую диэлектрическую частицу с радиусом основания  $a$  и высотой  $h (a \ll h)$ , покрытую нелинейным слоем толщиной  $d_0$ , падает плоская электромагнитная волна с циклической частотой  $\omega$  и волновым вектором  $\mathbf{k}^{(\omega)}$ . Отношение показателя преломления частицы к показателю преломления среды на частоте  $\omega$  обозначим  $\eta_\omega$ .

В данной задаче генерацией излучения от торцевых поверхностей частицы можно пренебречь, поэтому будем рассматривать генерацию в слоях на боковой поверхности частицы. Найдём выражение для вектора электрической напряжённости волны, падающей на поверхность частицы, с учётом сдвига фазы.

Рассмотрим произвольный луч падающей электромагнитной волны с циклической частотой  $\omega$  и волновым вектором  $\mathbf{k}^{(\omega)}$ , лежащий в плоскости  $xOy$ , и проходящий через поверхность частицы в точках  $A$  и  $B$  (рисунок 1 (а)). При рассмотрении траектории луча  $AB$  не будем учитывать преломление электромагнитных волн на границах раздела сред [1]. Тогда фазы в точках  $A$  и  $B$  соответственно равны  $\varphi_A^{(\omega)}(\mathbf{x}'_A) = k^{(\omega)} x'_A$  и  $\varphi_B^{(\omega)}(\mathbf{x}'_B) = k^{(\omega)} x'_B + \Delta\varphi^{(\omega)}$ , соответственно, где  $\Delta\varphi^{(\omega)}$  – сдвиг фазы, вызванный прохождением волны через среду с показателем преломления, отличным от показателя преломления окружающей среды. Рассматривая наклонное сечение в форме эллипса и его проекцию на плоскость, перпендикулярную оси симметрии частицы, запишем выражения для сдвига фаз и фазы в точке  $B$ :

$$\Delta\varphi^{(\omega)}(\mathbf{x}'_B) = 2(\eta_\omega - 1)k_\rho^{(\omega)}x'_B \left( \frac{|\mathbf{k}^{(\omega)}|}{k_\rho^{(\omega)}} \right)^2, \quad (1)$$

$$\varphi_B^{(\omega)}(\mathbf{x}'_B) = k^{(\omega)}x'_B + 2(\eta_\omega - 1)k_\rho^{(\omega)}x'_B \left( \frac{|\mathbf{k}^{(\omega)}|}{k_\rho^{(\omega)}} \right)^2. \quad (2)$$

Далее подберём такое обобщающее выражение для фазы, чтобы её значение в точке  $A$  было равно  $\varphi_A^{(\omega)}$ , а в точке  $B$  –  $\varphi_B^{(\omega)}$ :

$$\varphi^{(\omega)}(x') = k^{(\omega)}x' + (\eta_\omega - 1)(k_\rho^{(\omega)}x' + |k_\rho^{(\omega)}x'|) \left( \frac{|\mathbf{k}^{(\omega)}|}{k_\rho^{(\omega)}} \right)^2. \quad (3)$$

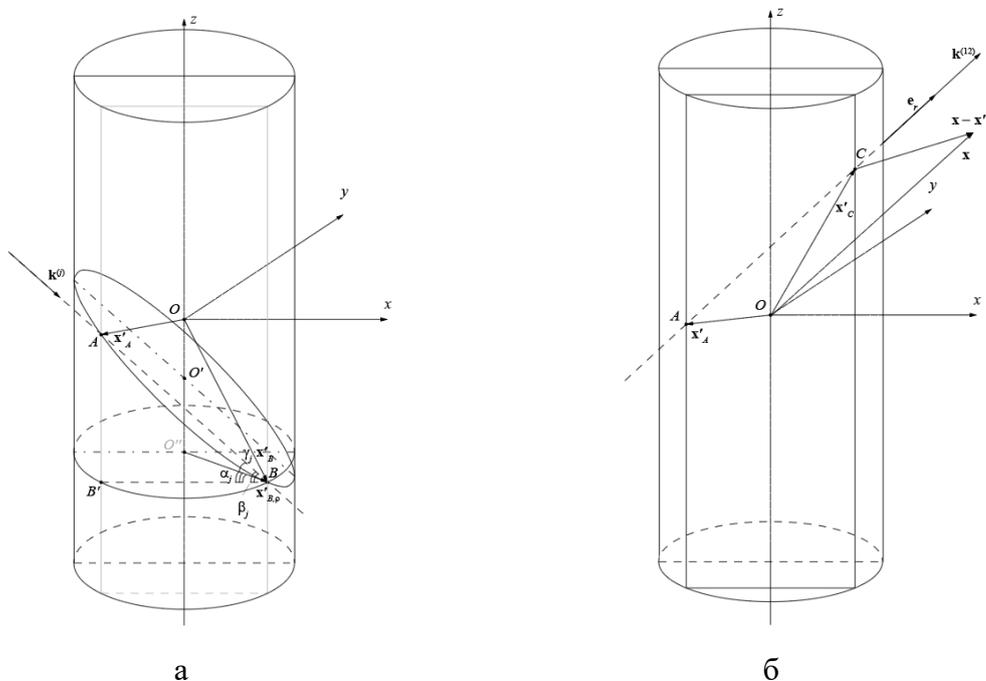


Рисунок 1 – Схемы распространения волн через боковую поверхность цилиндрической частицы: а – для описания падающих волн; б – для описания генерируемых волн

Определим фазу генерируемой волны. Пусть в поверхностном слое частицы генерируется волна, волновой вектор которой параллелен вектору  $\mathbf{e}_r$ . Единичный вектор  $\mathbf{e}_r$  является встречным к направлению наблюдения, производящемуся из дальней зоны (рисунок 1 (б)).

Фаза волны, пришедшей из точки  $C$  к наблюдателю, находящемуся в дальней зоне, равна  $\varphi_C^{(2\omega)}(x, x'_C) = k_{2\omega}|x - x'_C|$ , где  $k_{2\omega}$  – модуль волнового вектора  $\mathbf{k}^{(2\omega)}$  генерируемой волны. Фаза генерируемой волны, пришедшей к наблюдателю из точки  $A$ , равна  $\varphi_A^{(2\omega)}(x, x'_A) = k_{2\omega}|x - x'_A| + \Delta\varphi^{2\omega}$ . Здесь  $\mathbf{x}$  – вектор, определяющий положение наблюдателя относительно начала координат, а векторами  $\mathbf{x}'_C$  и  $\mathbf{x}'_A$  определено положение элементов поверхности цилиндрической частицы (точек  $C$  и  $A$  соответственно) относительно начала координат. Аналогично предыдущим рассуждениям, запишем выражения для сдвига фазы и фазы в точке  $A$  для генерируемой волны:

$$\Delta\varphi^{(2\omega)}(\mathbf{x}'_A) = -2(\eta_{2\omega} - 1)\mathbf{k}_\rho^{(2\omega)}\mathbf{x}'_A \left( \frac{|\mathbf{k}^{(2\omega)}|}{|\mathbf{k}_\rho^{(2\omega)}|} \right)^2, \quad (4)$$

$$\varphi_A^{(2\omega)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_A) = k_{2\omega}|x - x'_A| - 2(\eta_{2\omega} - 1)\mathbf{k}_\rho^{(2\omega)}\mathbf{x}'_A \left( \frac{|\mathbf{k}^{(2\omega)}|}{|\mathbf{k}_\rho^{(2\omega)}|} \right)^2. \quad (5)$$

Так как скалярное произведение  $\mathbf{k}_\rho^{(2\omega)}\mathbf{x}'_A$  отрицательное, а сдвиг фазы должен быть положительным, в выражении присутствует знак минус. Аналогично предыдущим рассуждениям, объединим полученные выражение для фаз в точках  $C$  и  $A$  и воспользуемся приближением дальней зоны [2]:

$$\varphi^{(2\omega)}(x, x') = k_{2\omega}|x| - k^{(2\omega)}x' + (\eta_{2\omega} - 1)\left(-\mathbf{k}_\rho^{(2\omega)}\mathbf{x}' + |\mathbf{k}_\rho^{(2\omega)}\mathbf{x}'|\right) \left( \frac{|\mathbf{k}^{(2\omega)}|}{|\mathbf{k}_\rho^{(2\omega)}|} \right)^2. \quad (6)$$

**Выражения для вектора напряжённости электрического поля суммарной частоты.** Для определения напряжённости электрического поля генерируемой волны запишем выражения для напряжённости падающих электромагнитных волн, с учётом (3):

$$\mathbf{E}^{(\omega)}(\mathbf{x}') = \frac{2}{\eta_\omega + 1} \mathbf{e}^{(\omega)} E_\omega \cdot \exp \left( i\mathbf{k}^{(\omega)}\mathbf{x}' + i(\eta_\omega - 1)(\mathbf{k}_\rho^{(\omega)}\mathbf{x}' + |\mathbf{k}_\rho^{(\omega)}\mathbf{x}'|) \left( \frac{|\mathbf{k}^{(\omega)}|}{|\mathbf{k}_\rho^{(\omega)}|} \right)^2 \right). \quad (7)$$

Для удобства в (7) опущена временная часть.

Причиной генерации второй гармоники в дипольной модели является наличие нелинейной части поляризации [3]. Учитывая (6) и (7), запишем выражение для компонент вектора напряжённости электрического поля генерируемого излучения:

$$E_i^{(2\omega)}(x) = 2\pi\mu_{2\omega} \frac{(2\omega)^2}{c^2} \frac{\exp(ik_{2\omega}r)}{r} ad_0 h E_\omega^2 (\delta_{im} - e_{r,i}e_{r,m}) X_{mjk}^{(2\omega)} e_j^{(\omega)} e_k^{(\omega)}, \quad (8)$$

где  $X_{mjk}^{(2\omega)}$  – эффективная восприимчивость, которая определяется по формуле

$$X_{mjk}^{(2\omega)} = \frac{1}{2\pi h} \left( \frac{2}{\eta_{\omega} + 1} \right)^2 \frac{\sin(q_z h / 2)}{q_z h / 2} \int_{2\pi} \exp[ia\Phi(n)] \chi_{mjk}^{(2)}(n) d\varphi', \quad (9)$$

где  $\Phi(\mathbf{n})$  определяется следующим образом:

$$\Phi_{lat}(n) = \mathbf{q}_p n + (\eta_{2\omega} - 1) \left( -\mathbf{k}^{(2\omega)} n + \left| \mathbf{k}_p^{(2\omega)} n \right| \right) \left( \frac{\left| \mathbf{k}^{(2\omega)} \right|}{\left| \mathbf{k}_p^{(2\omega)} \right|} \right)^2 + 2(\eta_{\omega} - 1) \left( \mathbf{k}_p^{(\omega)} n + \left| \mathbf{k}_p^{(\omega)} n \right| \right) \left( \frac{\left| \mathbf{k}^{(\omega)} \right|}{\left| \mathbf{k}_p^{(\omega)} \right|} \right)^2. \quad (10)$$

**Заключение.** В работе предложена модель генерации второй гармоники в поверхностном слое диэлектрической стержневидной частицы с использованием приближения ВКБ. На основе описанной модели с использованием численного интегрирования можно определить напряжённость электрического поля генерируемого излучения и использовать полученные результаты при планировании экспериментального исследования генерации второй гармоники в поверхностном слое диэлектрических частиц цилиндрической формы.

### Литература

1. Size dependence of second-harmonic generation at the surface of microspheres / S. Viarbitskaya [et al.] // *Physical Review A*. – 2010. – Vol. 81, № 5. – P. 053850.
2. Капшай, В. Н. Генерация второй гармоники от тонкого сферического слоя и условия отсутствия генерации / В. Н. Капшай, А. А. Шамына // *Оптика и спектроскопия*. – 2017 – Т. 123, № 3 – С. 416–429.
3. Шамына, А. А. Генерация второй гармоники от тонкого цилиндрического слоя. I. Аналитическое решение / А. А. Шамына, В. Н. Капшай // *Оптика и спектроскопия*. – 2019. – Т. 126, № 6. – С. 724–731.

**М. А. Гриб, М. В. Ковалев, С. Д. Саковский**

(ГГУ имени Ф. Скорины, Гомель)

Науч. рук. **Ю. В. Никитюк**, канд. физ.-мат. наук, доцент

### РАЗРАБОТКА И ПОСТАНОВКА ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ НА ТЕМУ «НЕЧЕТКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В СРЕДЕ MATLAB»

Современные области знаний ставят перед людьми сложные и многоуровневые задачи, которые не могут быть решены с помощью традиционных точных моделей или алгоритмов расчетов. Иногда эти задачи даже нельзя представить в виде конкретного набора численных данных. Поэтому часто приходится оценивать показатели качественно и приблизительно, опираясь на субъективное мышление человека. Именно благодаря такой способности анализировать нечеткую и неполную информацию человек может решать подобные задачи. В настоящее время построение моделей приближенных рассуждений и их использование в компьютерных системах является одной из ключевых проблем наук.

Нечеткая логика и теория нечетких множеств лежат в основе многих методов исследования и моделирования систем, относящихся к области искусственного интеллекта. Для реализации процесса нечеткого моделирования в среде MATLAB предназначен специальный пакет расширения Fuzzy Logic Toolbox.

Для демонстрации функциональных возможностей логического модуля Fuzzy Logic Toolbox можно использовать лабораторную работу по построению функций принадлежности метеорологических данных на основе экспертной информации [1, 2].