Литература

1. Леоненков, А. В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. – СПб. : БХВ-Петербург, 2005. – 736 с.
2. Pedregosa, F., et al. (2011). Scikit-learn: Machine Learning in Python. Journal of Machine Learning Research, 12, 2825-2830.
3. MATLAB Fuzzy Logic Toolbox Documentation. MathWorks.

И. В. Кругликов
(ГГУ имени Ф. Скорины, Гомель)
Науч. рук. **А. П. Старовойтов**, д-р физ.-мат. наук, профессор

О ЛОКАЛИЗАЦИИ ОСОБЫХ ТОЧЕК АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Множество всех упорядоченных пар целых неотрицательных чисел будем обозначать $\mathbb{Z}_+^2$. Порядком пары $\vec{m}=(m_1,m_2)\in\mathbb{Z}_+^2$ будем называть число $m:=m_1+m_2$.

Обобщённым многочленом степени не выше m будем называть рациональную дробь вида

$$Q(z)=\frac{a_{-m}}{z^m}+\ldots+\frac{a_{-1}}{z}+a_0+a_1z+\ldots+a_mz^m,$$

где $a_{-m},\ldots,a_m\in\mathbb{C}$. Множество всех обобщённых многочленов степени не выше m будем обозначать L_m.

Рассмотрим следующую задачу, которую будем называть задачей Эрмита-Лорана (задачей ЭЛ):

Для заданной системы $f=(f_1,f_2)$ из двух функций комплексного переменного, заданных рядом Лорана

$$f_1(z)=\sum\nolimits_{l=-\infty}^{\infty}f_l^1z^l,\qquad f_2(z)=\sum\nolimits_{l=-\infty}^{\infty}f_l^2z^l,$$

пары $\vec{m}=(m_1,m_2)\in\mathbb{Z}_+^2$ и числа $n\in\mathbb{Z}^+$, найти тождественно не равный нулю обобщённый многочлен $Q_{n,\vec{m}}(z)\in L_m$ и обобщённые многочлены $P_{n,\vec{m}}^j(z)\in L_{n_j}$, $n_j=n+m-m_j$, чтобы

$$Q_{n,\vec{m}}(z)\,f_j(z)-P_{n,\vec{m}}^j(z)=\sum\nolimits_{l=n+m+1}^{\infty}\left(c_l^jz^l+c_{-l}^jz^{-l}\right),\qquad j=1,2.$$

Обобщённые многочлены $Q_{n,\vec{m}}(z)$, $P_{n,\vec{m}}^1(z)$, $P_{n,\vec{m}}^2(z)$ будем называть многочленами Эрмита-Лорана для системы f и пары $(n,\vec{m})$.

Решение задачи ЭЛ всегда существует. Если тройка $\left(Q_{n,\vec{m}},P_{n,\vec{m}}^1,P_{n,\vec{m}}^2\right)$ является решением задачи ЭЛ, то для любого комплексного числа $\lambda\neq0$ новая тройка $\left(\lambda Q_{n,\vec{m}},\lambda P_{n,\vec{m}}^1,\lambda P_{n,\vec{m}}^2\right)$ также является решением этой задачи. Будем говорить, что задача ЭЛ имеет единственное решение, если это решение единственно с точностью до числового множителя.

Введём обозначения ($j=1,2$.):

$$F_l^j = \begin{pmatrix} f_{l+m}^j & f_{l+m-1}^j & \dots & f_{l+1}^j & f_l^j & f_{l-1}^j & \dots & f_{l-m+1}^j & f_{l-m}^j \end{pmatrix}$$

$$F_+^j = \begin{pmatrix} F_{n+m}^j & F_{n+m-1}^j & \dots & F_{n_j+1}^j \end{pmatrix}^T \qquad F_-^j = \begin{pmatrix} F_{-n_j-1}^j & F_{-n_j-2}^j & \dots & F_{-n-m}^j \end{pmatrix}^T$$

$$E_m(z) = \begin{pmatrix} z^{-m} & \dots & z^{-1} & 1 & z & \dots & z^m \end{pmatrix}$$

$$H_{n,\vec{m}} = \begin{pmatrix} F_+^2 \\ F_+^1 \\ F_-^1 \\ F_-^2 \end{pmatrix} \qquad D(n,\vec{m};z) = \det \begin{pmatrix} F_+^2 \\ F_+^1 \\ E_m(z) \\ F_-^1 \\ F_-^2 \end{pmatrix}$$

где $d_l^j(n,\vec{m})$ – определитель, полученный из $D(n,\vec{m};z)$ путём замены в нём $(m+1)$– й строки на строку F_l^j.

Теорема 1: Для того, чтобы для системы $f = (f_1, f_2)$, пары $\vec{m} = (m_1, m_2) \in \mathbb{Z}_+^2$ и числа $n \in \mathbb{Z}^+$ задача ЭЛ имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы матрица $H_{n,\vec{m}}$ была матрицей полного ранга, т.е. чтобы $rank\, H_{n,\vec{m}} = 2m$.

Если $rank\, H_{n,\vec{m}} = 2m$, то при определённом выборе нормирующего множителя

$$Q_{n,\vec{m}}(z) = D(n,\vec{m};z), \qquad P_{n,\vec{m}}^j(z) = \sum_{l=-n_j}^{n_j} d_l^j(n,\vec{m}) \cdot z^l,\ j = 1,2\,.$$

Известно, что если существуют пределы

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f_n^j}{f_{n+1}^j} = z_j \neq 0\,, \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{f_{-n}^j}{f_{-n-1}^j} = \frac{1}{z_{-j}} \neq \infty\,, \qquad |z_{-j}| < |z_j|, \qquad j = 1,2\,,$$

то точки $z_{\pm j}$ являются особыми точками суммы соответствующих рядов Лорана. Будем считать, что все эти точки различны.

Возьмём $\vec{m} = (1,1)$ и предположим, что для всех $n \geq n_0$ выполняются условия теоремы 1. Тогда, нормируя обобщённый многочлен $Q_{n,\vec{m}}(z)$

$$Q_{n,\vec{m}}^*(z) = \frac{1}{f_{n+5}^2 f_{n+5}^1 f_{-n-5}^1 f_{-n-5}^2} Q_{n,\vec{m}}(z)\,,$$

получим, что $\lim\limits_{n \to +\infty} Q_{n,\vec{m}}^*(z) = A(z - z_1)(z - z_2)\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_{-1}}\right)\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_{-2}}\right)$, где $A = \frac{z_1 \cdot z_2}{(z_{-1} \cdot z_{-2})^4}\ \times$ $\times \prod_{i<j;i,j\in\{-2,-1,1,2\}} (z_i - z_j)$.

Таким образом, корни обобщённого многочлена $Q_{n,\vec{m}}^*(z)$ стремятся к особым точкам $z_{\pm 1}, z_{\pm 2}$ суммы рядов $f_1(z), f_2(z)$, лежащих на границах соответствующих колец, внутри которых эти суммы аналитичны.