Доклады Академии наук СССР
1970. Том 195, № 2

УДК 513.83 *МАТЕМАТИКА*

А. Г. ЕЛЬКИН

О k-РАЗЛОЖИМЫХ ПРОСТРАНСТВАХ, НЕ ЯВЛЯЮЩИХСЯ МАКСИМАЛЬНО РАЗЛОЖИМЫМИ

(Представлено академиком П. С. Александровым 24 VI 1970)

Под пространством везде понимается плотное в себе T_0-пространство.

I. Теорема 1. *Всякое пространство представляется в виде дизъюнктного объединения замкнутого k-разложимого* своего подпространства и открытого своего подмножества, не содержащего никакого непустого k-разложимого подпространства, где $k \geqslant 1$.*

Для случая $k = 2$ эта теорема была доказана Хьюиттом [7].

Определение 1. Простанство X называется пространством фильтра, если его топология есть $\mathfrak{F} \cup \{\Lambda\}$, где $\mathfrak{F}$ — фильтр в множестве X (если $\mathfrak{F}$ — фильтр в множестве X, то $\mathfrak{F} \cup \{\Lambda\}$ удовлетворяет всем аксиомам топологии в множестве X).

Лемма 1. *Пространство фильтра, являющегося пересечением k ультрафильтров, $k \geqslant 1$, не является k^+-разложимым.*

Лемма 2. *Если некоторый конец ** пространства X образует базис фильтра в множестве X, являющегося пересечением k ультрафильтров, $k \geqslant 1$, то пространство X не является k^+-разложимым.*

Теорема 2. *Пространство X не является $(k+1)$-разложимым, $1 \leqslant k < \aleph_0$, тогда и только тогда, когда существует конец пространства X, образующий базис фильтра в множестве X, являющегося пересечением k ультрафильтров.*

Для случая $k = 1$ эта теорема доказана в [3],

Теорема 3. *Пусть $1 \leqslant k < \aleph_0$. Тогда следующие утверждения относительно плотного в себе T_1-пространства X эквивалентны:*

1) *X k разложимо и не содержит никакого непустого $(k+1)$-разложимого подпространства;*

2) *X представляется в виде объединения k попарно непересекающихся всюду плотных своих CI-подпространств ***;*

3) *X k-разложимо и представляется в виде объединения k своих SI-подпространств.*

Теорема 4. *Пусть $1 \leqslant k < \aleph_0$. Тогда следующие утверждения относительно непустого плотного в себе T_1-пространства X эквивалентны:*

1) *X содержит открытое всюду плотное множество, являющееся объединением k своих SI-подпространств;*

2) *всякий конец пространства X образует базис фильтра в множестве X, являющегося пересечением k ультрафильтров;*

3) *для каждой точки некоторого плотного в X множества существует конец пространства X, содержащий систему всех окрестностей этой точки и образующий базис фильтра в множестве X, являющегося пересечением k ультрафильтров;*

4) *X не содержит никакого непустого открытого $(k+1)$-разложимого подпространства.*

Для случая $k = 1$ эта теорема доказана в [3].

---

* Пространство называется k-разложимым, где k — кардинальное число $\geqslant 1$, если оно содержит (или, что эквивалентно, представляется в виде объединения) k попарно непересекающихся плотных в нем множеств. 2-разложимое пространство называется разложимым, ΔX-разложимое пространство — максимально разложимым (ΔX-дисперсионный характер пространства X есть минимальная мощность непустого открытого в X множества).

** Концом пространства X называется максимальная центрированная система открытых в X множеств. О свойствах концов см. в работах П. С. Александрова [1], С. Илиадиса и С. Фомина [5].

*** Пространство называется SI-пространством, или просто SI, если оно плотно в себе и не содержит никакого непустого разложимого подпространства.

II. Пусть $X = \bigcup \{X_\lambda\colon \lambda \in L\}$, где X — пространство и $\{X_\lambda\colon \lambda \in L\}$ — семейство плотных в X множеств. Множество $A \subseteq X$ мы будем называть отмеченным представлением $X = \bigcup\{X_\lambda\colon \lambda \in L\}$ пространства X, если A плотно в себе и если $A \subseteq [A \cap X_\lambda]$ при каждом $\lambda \in L$. Систему подмножеств пространства X, для которого задано указанное выше представление мощности $|L| = k \geqslant 1$, назовем q_k-системой (соответственно d_k-системой), относительно данного представления, если пересечение всякого конечного семейства множеств, являющихся элементами этой системы, отмечено (соответственно всюду плотно и отмечено) данным представлением пространства X или пусто. Максимальную центрированную q_k-систему (соответственно d_k-систему) мы будем называть q_k-концом (соответственно d_k-концом).

Пространство Y называется (собственным) расслаблением пространства X (expansion в терминологии Хьюитта ([7])), если X и Y определены на одном и том же множестве точек и если топология пространства Y (строго) содержит топологию пространства X. Если $\mathscr{A}$ — некоторая система подмножеств пространства X с топологией $\mathscr{T}$, то множество X, наделенное топологией с предбазой $\mathscr{T} \cup \mathscr{A}$, является расслаблением пространства X, которое мы будем называть $\mathscr{A}$-расслаблением пространства X. Топология $\mathscr{A}$-расслабления пространства X является, очевидно, верхней гранью двух топологий — топологии $\mathscr{T}$ пространства X и топологии с предбазой $\mathscr{A}$.

Определение 2. Пространство X называется $M_k'I$-пространством, если X можно представить в виде объединения $k \geqslant 1$ плотных в нем множеств таким образом, что всякое всюду плотное отмеченное этим представлением множество открыто в X. Любое из таких представлений мы будем называть представлением данного $M_k'I$-пространства. $M_k'I$-пространство с дизъюнктным представлением мы будем называть M_kI-пространством.

Очевидно, M_1I-пространства суть MI-пространства.

Теорема 5. *Всякое непустое пространство $X = \bigcup \{X_\lambda\colon \lambda \in L\}$, где X_λ плотно в X, $\lambda \in L$, и $|L| = k \geqslant 1$, имеет тождественно θ-гомеоморфное ему расслабление Y, являющееся $M_k'I$-пространством с представлением $Y = \bigcup\{X_\lambda\colon \lambda \in L\}$. Всякое такое расслабление связно (экстремально, H-замкнуто, хаусдорфово, урысоновское) тогда и только тогда, когда связно (соответственно экстремально, соответственно H-замкнуто, соответственно хаусдорфово, соответственно урысоновское) пространство X. Если это расслабление собственное, то оно неполурегулярно. Такими расслаблениями являются в точности все $\mathscr{A}$-расслабления пространства X, где $\mathscr{A}$ пробегает множество всех d_k-концов пространства X (относительно данного представления). При этом всякий d_k-конец пространства X является системой всех всюду плотных отмеченных множеств соответствующего ему расслабления. Если, кроме того, X есть T_1-пространство, то существует свободный * фильтр в множестве X (таковым является всякий d_k-конец в X) такой, что верхняя грань пространства этого фильтра и пространства X есть $M_k'I$-пространство.*

Теорема 6. *Пусть X есть плотное в себе T_1-пространство, $X = \bigcup \{X_\lambda\colon \lambda \in L\}$, X_λ плотно в X, $\lambda \in L$, $X_\lambda \cap X_{\lambda'} = \Lambda$, если $\lambda \neq \lambda'$, и $|L| = k \geqslant 1$. Тогда следующие утверждения относительно пространства X эквивалентны:*

1) *X есть M_kI-пространство с данным представлением;*

2) *всякое множество $T \subset X$ такое, что $\operatorname{int}_{X_\lambda}(T \cap X_\lambda) = \Lambda$ при каждом $\lambda \in L$, дискретно в X (т. е. замкнуто в X и дискретно в себе);*

3) *X_λ есть MI при каждом $\lambda \in L$ и всякое множество $T \subset X$, пересекающее X_λ по дискретному подпространству при каждом $\lambda \in L$, дискретно в X.*

Следствие. *Если $1 \leqslant k < \aleph_0$, то непустое M_kI-пространство, удовлетворяющее аксиоме отделимости T_1, не является $(k+1)$-разложимым.*

---

* Фильтр называется свободным, если он имеет пустое пересечение.

Это следствие и теорема 5 доказывают теорему 7 из ([4]).

Теорема 7. *Пусть $1 \leqslant k < \aleph_0$. Тогда следующие утверждения относительно k-разложимого T_1-пространства X эквивалентны:*

1) X есть $M_k I$-пространство относительно некоторого представления пространства X в виде объединения k попарно непересекающихся всюду плотных его подмножеств;

2) $X = \bigcup\{X_i: i = 1, \ldots, k\}$, X_i содержит открытое плотное в нем SI, $i = 1, \ldots, k$, и всякое нигде не плотное в X множество дискретно в X;

3) X есть $M_k I$-пространство относительно любого представления пространства X в виде объединения k попарно непересекающихся всюду плотных его подмножеств.

Теорема 8. *Пространство $X = \bigcup\{X_\lambda: \lambda \in L\}$, X_λ плотно в X, $\lambda \in L$, $|L| = k \geqslant 1$, является $M_k'I$-пространством с данным представлением тогда и только тогда, когда всякое собственное расслабление Y пространства X имеет другой запас канонических открытых множеств или существует $\lambda \in L$ такое, что X_λ не является плотным в Y.*

III. Определение 3. Пространство X называется M_k'-пространством, если X можно представить в виде объединения $k \geqslant 1$ плотных в нем множеств таким образом, что всякое отмеченное этим представлением множество открыто в X. M_k'-пространство с дизъюнктным таким представлением мы будем называть M_k-пространством *.

Очевидно, M_1-пространства суть максимальные ** пространства. Всякое M_k'-пространство является $M_k'I$-пространством относительно того же представления.

Пространство, в котором всякое полуоткрытое *** множество открыто, мы будем называть **глобальным**, а глобальное хаусдорфово пространство — глобально-несвязным.

Предложение 1. 1°. *Всякое M_k'-пространство глобально.*

2°. *Всякое хаусдорфово M_k'-пространство является урысоновским.*

Теорема 9. *Всякое (хаусдорфово) пространство $X = \bigcup\{X_\lambda: \lambda \in L\}$, где X_λ плотно в X, $\lambda \in L$, и $|L| = k \geqslant 1$, имеет (урысоновское) расслабление Y, являющееся M_k'-пространством с представлением $Y = \bigcup\{X_\lambda: \lambda \in L\}$. Такими расслаблениями являются в точности все $\mathscr{A}$-расслабления пространства X, где $\mathscr{A}$ пробегает множество всех максимальных q_k-систем пространства X, причем каждая из последних является топологией соответствующего ей расслабления. Таким расслаблением является также всякое $\mathscr{A}$-расслабление пространства X, где $\mathscr{A}$ есть q_k-конец в X. Если X — непустое плотное в себе T_1-пространство, то в множестве X существует по крайней мере одна антихаусдорфова T_1-топология (именно, $\mathscr{A} \cup \{\Lambda\}$, где $\mathscr{A}$ есть q_k-конец в X) такая, что верхняя грань этой топологии и топологии пространства X есть топология M_k'-пространства.*

Теорема 10 ([2]). *Пусть X — плотное в себе T_1-пространство, $X = \bigcup\{X_\lambda: \lambda \in L\}$, X_λ плотно в X, $\lambda \in L$, $X_\lambda \cap X_{\lambda'} = \Lambda$, если $\lambda \neq \lambda'$, и $|L| = k \geqslant 1$. Для того чтобы X было M_k-пространством с данным представлением, необходимо и достаточно, чтобы X_λ было максимальным подпространством при каждом $\lambda \in L$ и чтобы всякое множество $T \subset X$, пересекающее X по дискретному подпространству при каждом $\lambda \in L$, было дискретно в X.*

Следствие ([2]). *Если $1 \leqslant k < \aleph_0$, то непустое M_k-пространство, удовлетворяющее аксиоме отделимости T_1, не является $(k+1)$-разложимым.*

Теорема 11. *Пусть $1 \leqslant k < \aleph_0$. Тогда следующие утверждения относительно непустого k-разложимого T_1-пространства X эквивалентны:*

---

* Эквивалентное (для $k \geqslant 2$) определение M_k-пространства было дано в ([3]).

** Пространство называется максимальным, если оно плотно в себе и если каждое плотное в себе подмножество этого пространства открыто.

*** Подмножество A пространства X называется полуоткрытым, если $U \subseteq A \subseteq [U]$ для некоторого открытого в X множества U.

1) *X есть M_k-пространство относительно некоторого представления пространства X в виде объединения k попарно непересекающихся всюду плотных его подмножеств*;

2) *$X = \bigcup\{X_i\colon i = 1, \ldots, k\}$, X_i содержит открытое плотное в нем SI, $i = 1, \ldots, k$, и пространство X глобально*;

3) *X есть M_k-пространство относительно любого представления пространства X в виде объединения k попарно непересекающихся всюду плотных его подмножеств*;

4) *X глобально и для каждой точки $x \in X$ система $\{U \setminus \{x\}\colon U$ — окрестность точки x в $X\}$ образует базис фильтра в множестве X, являющегося пересечением k ультрафильтров.*

Теорема 12. *Пусть X — непустое m-разложимое T_1-пространство и $sX < m$. Тогда для каждого k, $2 \leqslant k < m$, X имеет расслабление Y такое, что*: 1) *Y есть M_k-пространство,* 2) *$sY = sX$,* 3) *$\Delta Y \geqslant m$,* 4) *Y не является l^+-разложимым, где $l = \max\{k, sX\} < m$.*

Следствие. *Для всякого кардинального числа $k \geqslant \aleph_0$ существует урысоновское (M_k-) пространство X, $|X| = \Delta X = 2^{2^k}$, $sX \leqslant k$, X k-разложимо, но не является k^+-разложимым и, значит, не является максимально разложимым. Кроме того, существует сепарабельное урысоновское пространство Z, $|Z| = \Delta Z = 2^{\aleph}$, Z $\aleph_0$-разложимо, но не является максимально разложимым.*

Это следствие дает положительное решение проблемы Q_2 Сидера и Пирсона ([6]) в классе урысоновских пространств (существование бесконечно разложимых не максимально разложимых T_1-пространств доказано в ([3])).

Теорема 13. *Пространство $X = \bigcup\{X_\lambda\colon \lambda \in L\}$, X_λ плотно в X, $\lambda \in L$, и $|L| = k \geqslant 1$, является M_k'-пространством с данным представлением тогда и только тогда, когда для всякого собственного плотного в себе расслабления Y пространства X существует $\lambda \in L$ такое, что X_λ не является плотным в Y.*

Для M_k-пространств, $k \geqslant 2$, эта теорема была доказана в ([3]).

Следствие 1. *T_1-пространство X является M_k-пространством тогда и только тогда, когда X k-разложимо, а всякое собственное расслабление пространства X не является k-разложимым, где $2 \leqslant k < \aleph_0$.*

Следствие 2. *Пусть $2 \leqslant k < \aleph_0 \leqslant n$, где n либо $= \aleph_0$, либо удовлетворяет условию $n^{\aleph_0} = n$. Тогда существует k-разложимое урысоновское пространство мощности n, в котором всякое множество меньшей, чем n, мощности дискретно и всякое собственное расслабление которого не является k-разложимым.*

IV. Проблема Q_1 Сидера и Пирсона ([6]) формулируется следующим образом: является ли максимально разложимым произведение двух пространств, одно из которых максимально разложимо?

Теорема 14. *Если существует свободный счетноцентрированный* ультрафильтр, то проблема Q_1 имеет отрицательное решение: произведение пространства такого ультрафильтра на пространство рациональных чисел не является максимально разложимым.*

Работа выполнена под руководством В. И. Пономарева, которому автор приносит свою искреннюю благодарность.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
24 VI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. С. Александров, Матем. сборн., 5 (47), № 2, 403 (1939). [2] А. Г. Елькин, Вестн. Московск. унив., Матем. мех., № 4, 66 (1969). [3] А. Г. Елькин, Вестн. Московск. унив., Матем. мех., № 5, 51 (1969). [4] А. Г. Елькин, ДАН, 189, № 3, (1969). [5] С. Илиадис, С. Фомин, УМН, 21, в. 4 (130), 47 (1966). [6] J. Ceder, T. Pearson, Pacif. J. Math., 22, № 1, 31 (1967). [7] E. Hewitt, Duke Math. J., 10, № 2, 309 (1943).

* Семейство множеств называется счетноцентрированным, если всякое его счетное подсемейство имеет непустое пересечение.