Доклады Академии наук СССР
1970. Том 195, № 4

УДК 521.21 *АСТРОНОМИЯ*

В. Н. ЖАРКОВ, В. П. ТРУБИЦЫН, А. А. КАЛАЧНИКОВ

К РАСЧЕТУ ГРАВИТАЦИОННОГО МОМЕНТА J_6 ЮПИТЕРА И САТУРНА

(Представлено академиком В. Г. Фесенковым 29 IV 1970)

Внешний гравитационный потенциал вращающейся равновесной планеты может быть записан в виде [1]

$$V(r,t) = \frac{GM}{r}\left\{1 - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_1}{r}\right)^{2n} J_{2n}P_{2n}(t)\right\}, \tag{1}$$

где G — гравитационная постоянная; M и a_1 — масса и экваториальный радиус планеты; $t = \cos\vartheta$; $P_{2n}(t)$ — полиномы Лежандра. Коэффициенты J_{2n} называются относительными гравитационными моментами планеты и определяются соотношением

$$J_n = -\frac{1}{Ma_1^n}\int \rho(r', t')(r')^n P_n(t')\,d\tau. \tag{2}$$

Здесь $\rho(r, t)$ — распределение плотности в планете, а интегрирование производится по всему объему планеты, где $\rho \neq 0$.

До сих пор для Юпитера и Сатурна вычислялись теоретически и определялись по наблюдениям естественных спутников только два первых момента J_2 и J_4. В работах [1, 2] развита теория фигуры гидростатически равновесных вращающихся планет с учетом членов третьего приближения. С помощью этой теории, используя имеющиеся модельные распределения плотности в планетах Юпитер и Сатурн, можно теоретически предсказать величину момента J_6 этих планет.

Как видно из (2), моменты J_n целиком определяются угловой зависимостью плотности $\rho(r, t)$, т. е. формой внутренних уровенных поверхностей и внешней поверхности планеты. Согласно (1), уравнение этих поверхностей может быть записано в виде

$$\begin{gathered} r(a, t) = a[1 - e\cos^2\vartheta - ({}^3/_8 e^2 + k)\sin^2 2\vartheta + \\ + {}^1/_4({}^1/_2 e^3 + h)(1 - 5\sin^2\vartheta)\sin^2 2\vartheta], \end{gathered} \tag{3}$$

где a — экваториальный радиус уровенной поверхности; $e(a)$, $k(a)$, $h(a)$ — параметры, характеризующие ее форму. Для медленно вращающихся планет e, k, h имеют соответственно первый, второй и третий порядок малости и определяются из системы уравнений [1]

$$\begin{gathered} eD - {}^1/_2 m - {}^3/_5(S + T) = 0, \\ (3e^2 - 8k)D - 6eS + 3P + {}^9/_3 Q = 0, \\ (e^2 + {}^{32}/_7 ek - {}^{16}/_7 h)D - {}^3/_7(e^2 + 8k)S - {}^{15}/_7 eP + {}^{11}/_7 H + \\ + {}^{32}/_{21} eQ + {}^{30}/_{91} J = 0, \end{gathered} \tag{4}$$

где

$$D(\beta) = \beta^{-3}\int_0^\beta \delta(t)\,dt^3, \quad dt^3 = \frac{d[t^3]}{dt}dt,$$

$$S(\beta)=\beta^{-5}\int\limits_0^{\beta}\delta(t)\,d\,[et^5],\quad P(\beta)=\beta^{-7}\int\limits_0^{\beta}\delta(t)\,d\,[t^7(e^2+{}^8/_9\,k)],$$

$$H(\beta)=\beta^{-9}\int\limits_0^{\beta}\delta(t)\,d\,[t^9(e^3+{}^{192}/_{143}\,ek+{}^{30}/_{143}\,h)],$$

$$T(\beta)=\int\limits_{\beta}^{1}\delta(t)\,d\,[e],\quad Q(\beta)=\beta^2\int\limits_{\beta}^{1}\delta(t)\,d\,[t^{-2}k], \tag{5}$$

$$J(\beta)=\beta^4\int\limits_{\beta}^{1}\delta(t)\,[t^{-4}(h-4ek)].$$

Здесь $\beta=s/s_1$ — средний относительный радиус поверхности; индекс 1 означает, что соответствующая величина относится к внешней поверхности; $\delta(s)=\rho(s)/\rho_0$ — относительная плотность; ρ_0 — средняя плотность планеты; $m=3\omega^2/4\pi G\rho_0$ — малый параметр теории, ω — угловая скорость вращения планеты.

При практических расчетах удобно преобразовать величины S, P, H, T, Q, J с помощью интегрирования по частям, перенося знак дифференцирования на плотность, например

$$S(\beta)=\delta(\beta)\,e(\beta)-\beta^{-5}\int\limits_0^{\beta}t^5e\,\frac{d\delta}{dt}\,dt. \tag{6}$$

Зная распределение плотности в планете $\rho(s)$ и решая с помощью электронных вычислительных машин систему уравнений (4), (5), можно найти параметры e, k, h как функции относительного радиуса β. Затем можно вычислить моменты J_2, J_4, J_6. При этом формулу (2), определяющую моменты J_n, удобно записать в виде алгебраических соотношений [3]

$$\begin{aligned} J_2&={}^2/_3e_1-{}^1/_3m-{}^1/_3e_1^2+{}^2/_{21}me_1+{}^8/_{21}k_1,\\ J_4&=-{}^4/_5e_1^2+{}^4/_7e_1m-{}^{32}/_{35}k_1+{}^4/_5e_1^3-{}^{22}/_{49}e_1^2m+\\ &\quad+{}^{3616}/_{2695}e_1k_1+{}^{208}/_{385}mk_1-{}^{192}/_{385}h_1,\\ J_6&={}^8/_7e_1^3-{}^{20}/_{21}e_1^2m+{}^{128}/_{77}e_1k_1-{}^{160}/_{231}k_1m+{}^{80}/_{231}h_1 \end{aligned} \tag{7}$$

или в виде интегральных соотношений

$$\begin{aligned} J_2&={}^2/_5(1-{}^2/_3e_1-{}^1/_9e_1^2-{}^{16}/_{15}k_1)S(1),\\ J_4&=-{}^{12}/_{35}(1-{}^4/_3e_1)P(1),\quad J_6={}^8/_{21}H(1). \end{aligned} \tag{8}$$

Можно показать, что решение уравнений теории фигуры (4) представимы в виде сходящихся рядов для степенных законов распределения плотности. Особое место занимают простейшие законы — линейный и квадратичный

$$\delta(\beta)=4(1-\beta), \tag{9}$$

$$\delta(\beta)={}^5/_2(1-\beta^2), \tag{10}$$

которые хорошо аппроксимируют реальное распределение плотности в водородо-гелиевых планетах. При написании (9) и (10) учтено, что для рассматриваемых планет $\delta_1=0$, и условие полной массы $D(1)=1$. Для закона (10) решение следующее:

$$e=\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i\beta^{2i};\quad k=\sum_{i=0}^{\infty}\gamma_i\beta^{2i+2};\quad h=\sum_{i=0}^{\infty}\nu_i\beta^{2i+2}. \tag{11}$$

Численные значения нескольких первых коэффициентов в этих рядах равны

$$\alpha_i / \alpha_0 = 1;\ 0{,}172;\ 0{,}0744;\ 0{,}0378;\ 0{,}0205;\ 0{,}0115;\ \ldots;\quad \alpha_0 = 0{,}619\, m;$$

$$\gamma_i / \alpha_0^2 = 0{,}041;\ 0{,}023;\ 0{,}017;\ 0{,}013;\ 0{,}010;\ \ldots; \qquad (12)$$

$$\nu_i / \alpha_0^3 = 0{,}166;\ 0{,}136;\ 0{,}109;\ 0{,}089;\ 0{,}071;\ 0{,}056;\ \ldots$$

Нас интересует значение параметров e, k, h на поверхности, $\beta = 1$. Ряды (11) показывают, что на e_1, k_1 и h_1, а следовательно на форму внешней поверхности и моменты J_n существенное влияние оказывает распределение массы во всей планете, а не только в ее наружных слоях. Для закона (9) решение более сложное:

$$e = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \beta^i; \quad k = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i \beta^{i+1} + \ln\beta \sum_{i=0}^{\infty} \bar{\gamma}_i \beta^{i+2};$$

$$h = \sum_{i=0}^{\infty} \nu_i \beta^{i+1} + \ln\beta \sum_{i=0}^{\infty} \bar{\nu}_i \beta^{i+2} + \ln^2\beta \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i \beta^{i+3}. \qquad (13)$$

Результаты расчетов для квадратичного закона плотности (10) даны в табл. 1.

Таблица 1

	m	e_1	k_1	h_1	J_2	$-J_4$	J_6	J	K
Юпитер	0,084	0,069	$3{,}7\cdot10^{-4}$	$11{,}4\cdot10^{-5}$	0,0172	$7{,}6\cdot10^{-4}$	$5{,}3\cdot10^{-5}$	0,026	0,0029
Сатурн	0,14	0,115	$10{,}2\cdot10^{-4}$	$53{,}2\cdot10^{-5}$	0,028	$2{,}0\cdot10^{-3}$	$2{,}5\cdot10^{-4}$	0,042	0,0074

Для линейного закона плотности (9) расчитывались J_2, J_4. Результаты совместно с соответствующими экспериментальными данными [4] сведены в табл. 2.

Таблица 2

	e_1	k_1	J	K	$J_{эксп}$	$K_{эксп}$
Юпитер	0,065	$4{,}1\cdot10^{-4}$	0,023	$2{,}3\cdot10^{-3}$	$0{,}02206\pm0{,}00022$	$0{,}0025\pm0{,}0014$
Сатурн	0,108	$11{,}6\cdot10^{-4}$	0,038	$6{,}5\cdot10^{-3}$	$0{,}02501\pm0{,}00003$	$0{,}0039\pm0{,}0003$

Приведенные оценки имеют точность порядка 10% в рамках принятых законов плотности. Для Юпитера оба закона плотности (10) и (9) приводят к хорошему согласию с экспериментальными J и K, причем линейный закон дает даже лучшее согласие. Можно полагать, что рассчитанное значение $J_6 = 5{,}3\cdot10^{-5}$ имеет погрешность не больше 20% и таким образом уже сейчас может вводиться в теорию движения пятого спутника Юпитера (Амальтеи) [5].

Для Сатурна законы плотности (10) и (9) дают значения J и K, отличающиеся от наблюдаемых, хотя само расхождение не так велико (меньше чем в два раза). Для Сатурна линейный закон (9) дает заметно лучшие результаты, чем квадратичный закон (10), так как он эффективно учитывает концентрацию плотности к центру планеты. Это показывает, что значение гравитационных моментов существенно зависит от распределения плотности во всей планете, в том числе и от распределения плотности в центральных областях. Вывод о важности распределения плотности во всей планете для расчета J_n, на первый взгляд, противоречит интуитивному представлению о существенности лишь распределения плотности в наружных слоях планеты (высокие степени радиуса в интеграле для J_n (2)).

В действительности распределение плотности во всем интервале $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ существенно влияет на форму уровенных поверхностей и посредством этого на J_n. В настоящее время не ясно достаточное ли внимание на это обстоятельство обращали предыдущие исследователи. Данные табл. 1 и табл. 2 можно еще истолковать и так, что в Сатурне имеется заметная концентрация вещества к центру (большое тяжелое ядро), и значение $J_6 = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$, приведенные в табл. 1, завышено примерно вдвое.

Пользуемся случаем поблагодарить О. В. Иванова за помощь в численных расчетах.

Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта
Академии наук СССР

Поступило
18 IV 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Н. Жарков, В. П. Трубицын, ДАН, 186, № 4, 791 (1969). [2] В. Н. Жарков, В. П. Трубицын, Астроном. журн., 46, № 6, 1252 (1969). [3] В. Н. Жарков, В. П. Трубицын, Астроном. журн., 47, № 6 (1970). [4] P. J. E. Peebles, Astrophys. J., 140, № 1, 328 (1964). [5] В. Н. Кирюшенков, Вестн. Моск. унив., сер. физ., астр., № 2, № 4 (1969).