Благодаря постоянному развитию и совершенствованию технологий, ускорители заряженных частиц остаются важным инструментом для научных исследований и прогресса во многих областях фундаментальной и прикладной науки.

Литература

1. Трофимова, Т. И. Курс физики: учеб. пособие для вузов / Т. И. Трофимова. – 11-е изд., стер. – М. : Издательский центр «Академия», 2006. – 560 с.

А. В. Павленко[1, 2]
(ГГУ имени Ф. Скорины, Гомель[1])
(Гомельский государственный медицинский университет, Гомель[2])
Науч. рук. **В. Н. Капшай[1]**, канд. физ.-мат. наук, доцент

ПАРЦИАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В ДВУМЕРНОМ РЕЛЯТИВИСТСКОМ КОНФИГУРАЦИОННОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

В квантовой теории поля переход из двумерного импульсного представления в двумерное релятивистское конфигурационное представление осуществляется посредством разложения физических величин по матричным элементам неприводимого унитарного представления группы Лоренца, которые имеют вид [1]:

$$\xi(\mathbf{p},\boldsymbol{\rho}) = \left(\frac{\sqrt{m^2 + p^2} - \mathbf{p}\mathbf{n}_{\rho}}{m} \right)^{-\frac{1}{2} - im\rho}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\rho} = \rho \mathbf{n}_{\rho}$ – двухмерный радиус-вектор в релятивистском конфигурационном представлении;

$\mathbf{n}_{\rho} = \boldsymbol{\rho} / \rho$ – единичный вектор.

Разложение по функциям (1) называется преобразованием Шапиро. В нерелятивистском пределе функции (1) преобразуются в нерелятивистские плоские волны:

$$\lim_{m\to\infty} \xi(\mathbf{p},\boldsymbol{\rho}) = e^{i\mathbf{p}\boldsymbol{\rho}}. \tag{2}$$

Парциальное разложение плоской релятивистской волны ζ ($\mathbf{p}$, $\boldsymbol{\rho}$) представим в следующей форме:

$$\xi(\mathbf{p},\boldsymbol{\rho}) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} i^{\mu} s_{\mu}(\chi,\rho) \exp(i\mu\varphi), \tag{3}$$

где в целях упрощения последующих вычислений введена быстрота χ, связанная с импульсом p выражением $p = m\mathrm{sh}(\chi)$;

φ – угол между импульсом $\mathbf{p}$ и вектором $\boldsymbol{\rho}$;

$s_{\mu}(\chi,\rho)$ – парциальные волны, определяемые по формуле

$$s_{\mu}(\chi,\rho) = i^{\mu} \frac{\Gamma(1/2 - im\rho)}{\Gamma(1/2 + \mu - im\rho)} P^{\mu}_{-im\rho-1/2}(\mathrm{ch}\chi), \tag{4}$$

где $\Gamma(z)$ – гамма функция;

$P_a^b(z)$ – функция Лежандра первого рода [2].

Отметим, что двухмерные парциальные волны (3) обладают следующим свойством

$$s_\mu(\chi,\rho) = (-1)^\mu s_{-\mu}(\chi,\rho). \tag{5}$$

Парциальные волны $s_\mu(\chi,\rho)$ можно представить в следующей форме

$$s_\mu(\chi,\rho) = \frac{e^+(\chi,\rho) - e^-(\chi,\rho)}{2i}, \tag{6}$$

$$e_\mu^{\pm}(\chi,\rho) = i^\mu \frac{2}{\pi} \operatorname{cth}(\pi m\rho) \frac{\Gamma(1/2 - im\rho)}{\Gamma(1/2 + \mu - im\rho)} Q^\mu_{-1/2\mp im\rho}(\operatorname{ch}\chi). \tag{7}$$

где $Q_a^b(z)$ – функция Лежандра второго рода [2]. Как известно функции Лежандра первого рода можно выразить через функции Лежандра второго рода при помощи формулы Уиппла [2]:

$$P^{-\nu-1/2}_{-\mu-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(z^2-1)^{-1/4}}{\Gamma(\nu+\mu+1)} \exp(-i\mu\pi) Q^\mu_\nu\left(\frac{z}{\sqrt{z^2-1}}\right), \quad \operatorname{Re} z > 0. \tag{8}$$

Применяя (8) к (4) и (7), получим парциальные функции в альтернативной форме

$$\begin{aligned} s_\mu(\chi,\rho) = i^\mu &\frac{\Gamma(1/2 - im\rho)}{\Gamma(1/2+\mu-im\rho)\Gamma(1/2-\mu-im\rho)} \times \\ &\times \exp(-\pi m\rho)\left(\frac{2}{\pi \operatorname{sh}(\chi)}\right)^{1/2} Q^{-im\rho}_{\mu-1/2}(\operatorname{cth}\chi), \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} e_\mu^{\pm}(\chi,\rho) = (-i)^\mu &\sqrt{\frac{2}{\pi \operatorname{sh}(\chi)}} \operatorname{cth}(\pi m\rho) \times \\ &\times \frac{\Gamma(1/2 - im\rho)\Gamma(1/2+\mu\mp im\rho)}{\Gamma(1/2+\mu-im\rho)} P^{\pm im\rho}_{-\mu-1/2}(\operatorname{cth}\chi). \end{aligned} \tag{10}$$

В нерелятивистском пределе ($m\to\infty, \chi\to 0, m\chi\to p$) функции $s_\mu(\chi,\rho)$ и $e_\mu^{\pm}(\chi,\rho)$ переходят в функции Бесселя J_μ и функции Ханкеля 1-го и 2-го рода $H_\mu^{(1,2)}$:

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ \chi\to 0}} s_\mu(\chi,\rho) = J_\mu(p\rho), \tag{11}$$

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ \chi\to 0}} e_\mu^{\pm}(\chi,\rho) = \pm i H_\mu^{(1,2)}(p\rho). \tag{12}$$

В данной работе мы получили парциальные волны в двумерном релятивистском конфигурационном представлении, выраженные через присоединённые функции Лежандра первого и второго рода.

Литература

1. Nagiyev, S. M. The relativistic two-dimensional harmonic oscillator / S. M. Nagiyev, E. I. Jafarov, M. Y. Efendiyev // IL Nuovo Cimento. – 2009. – 124 B. – p. 395–403.

2. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и производных / И. С. Градштейн. – СПб.: БХВ-Петербург: 7-е изд, 2011. – 1232 с.

А. В. Павленко[1, 2]
(ГГУ имени Ф. Скорины, Гомель[1]
Гомельский государственный медицинский университет, Гомель[2])
Науч. рук. **В. Н. Капшай[1]**, канд. физ.-мат. наук, доцент

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЛОГУНОВА-ТАВХЕЛИДЗЕ С РЕЛЯТИВИСТСКИМ АНАЛОГОМ ПОТЕНЦИАЛА ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Двумерное уравнение Логунова-Тавхелидзе, описывающее связанные состояния системы двух скалярных частиц одинаковой массы m, в импульсном представлении имеет следующий вид:

$$(E^2 - m^2 - \mathbf{p}^2)\,\psi(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int V(\mathbf{p},\mathbf{k})\psi(\mathbf{k})\frac{m}{E_k}d^2k,\ E_k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}, \tag{1}$$

где $2E$ – энергия системы,

$\mathbf{p}$ – относительный импульс в системе центра масс;

$\psi(\mathbf{p})$ – волновая функция;

$V(\mathbf{p},\mathbf{k})$ – потенциал.

Нерелятивистский потенциал гармонического осциллятора имеет следующий вид

$$V(\rho) = \omega^2\rho^2, \tag{2}$$

где ω – константа связи;

$\rho \geq 0$ – модуль двумерного радиус-вектора $\boldsymbol{\rho}$ в координатном представлении.

Используя двумерное преобразование Фурье для потенциала (2), получим его выражение в импульсном представлении:

$$V(\mathbf{p},\mathbf{k}) = -(2\pi)^2\omega^2\Delta_p\delta(\mathbf{p}-\mathbf{k}), \tag{3}$$

где Δ_p – оператор Лапласа на плоскости импульсов;

$\delta(\mathbf{p}-\mathbf{k})$ – двумерная дельта-функция.