Доклады Академии наук СССР
1970. Том 195, № 2

УДК 519.4:517:513.88 *МАТЕМАТИКА*

В. В. ЖИКОВ

ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 6 VII 1970)

1. Введение. В сепарабельном банаховом пространстве B рассмотрим уравнение

$$u' = Q(t)u, \tag{1}$$

где $Q(t)$ есть, вообще, неограниченный нелинейный оператор, зависящий от t почти периодически. Начиная с работы Фавара [1], условия существования почти-периодических (п.п.) решений формулируются в терминах так называемых предельных уравнений.

Предположим, что область определения $D = D(Q(t))$ не зависит от t и есть сепарабельное банахово пространство, плотное в B. Пусть $Q(t)$ есть непрерывное преобразование $B \to B$, зависящее от t почти-периодически равномерно в каждом ограниченном множестве D. Тогда из всякой последовательности $\{t_m\}$ можно выделить подпоследовательность $\{t_m'\}$, такую, что $Q(t + t_m')u \to Q(t)u$. Множество элементов h вида $h = Q(s)$ образует компактную метрическую группу G с системой сдвигов L_t и инвариантной мерой λ. Предельными уравнениями будут уравнения вида

$$u' = \hat{Q}(t)u. \tag{1'}$$

Ниже мы пользуемся (вообще, порознь) следующими предположениями относительно уравнений (1′):

а) задача Коши разрешима для любого начального значения $u \in B$ и разрешающий оператор $T_h(t)$ сильно непрерывен при $t \geqslant 0$;

б) разрешающий оператор $T_h(t)$ слабо непрерывен при $t \geqslant 0$;

в) выполнено условие непрерывной зависимости от «правых частей», состоящее в том, что если $\|u\| \leqslant c < \infty$, $h_m \to h$, то $\|T_{h_m}(t)u - T_h(t)u\| \to 0$ при $t > 0$ равномерно по u.

Далее, если (1) есть линейное уравнение вида $u' = A(t)u + f(t)$, то удобнее использовать разрешающий оператор $V_h(t)$ соответствующих однородных задач. Здесь условие б) вытекает из а).

Положим $X = B \times G$ и $S_t x = S_t\{u, h\} = \{T_h(t)u, L_t h\}$. Легко проверить (см. [3–5]), что преобразования S_t образуют динамическую систему, если B наделить соответствующей (сильной или слабой) топологией.

2. П.п. в смысле Безиковича решения линейных уравнений. В работах С. Л. Соболева [6], Л. Америо [10] и др. (см. [9]) изучен вопрос о п.п. решениях гиперболических уравнений; методы исследования опираются на существование (для однородного уравнения) интеграла энергии. Результаты абстрактной теории Фавара [7, 8] позволяют изучить случай диссипации энергии, но не больше этого. В общем случае переменной энергии проблемы почти-периодичности удается разрешить лишь в классе Безиковича. Соответствующая теорема формулируется для уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве.

Теорема 1. *Пусть A — производящий оператор сильно непрерывной полугруппы, $B(t)$ — п.п. в смысле операторной нормы функция и $f(t)$ — п.п. функция. Тогда, если уравнение $u' = Au + B(t)u + f(t)$ имеет ограниченное решение, то существует множество $\Lambda \subset G$ полной λ-меры, такое, что при $h \in \Lambda$ соответствующее уравнение $u' = Au + \hat{B}(t)u + \hat{f}(t)$ имеет* *п.п. в смысле Безиковича решение с тем же модулем показателей Фурье, что и* $\{B(t), f(t)\}$.

З а м е ч а н и е 1. Пусть $u(t)$ — ограниченное решение и $X_0 \subset X$ — замыкание соответствующей траектории. Обозначим через X_1 замкнутое инвариантное подмножество такое, что $X_0 \subset X_1$ и слой над некоторым элементом $h \in G$ есть выпуклое множество в H. Тогда решения, даваемые теоремой 1, могут быть выбраны из X_1.

З а м е ч а н и е 2. Для гиперболического уравнения $u'' + A^2 u + B(t) u = f(t)$ условия теоремы 1 выполнены, если A — положительно определенный оператор и $A^{-1}B(t)$ — п.п. в смысле операторной нормы функции Здесь ограниченность решения есть ограниченность «энергии» $\|Au\|^2 + \|u'\|^2$.

З а м е ч а н и е 3. Теорема 1 обобщается на тот случай, когда A зависит от t периодически и выполнены обычные условия разрешимости задачи Коши. Общий случай, когда главная часть A зависит от t почти периодически, встречает затруднения.

3. О б щ и е т е о р е м ы о п.п. р е ш е н и я х н е л и н е й н ы х у р а в н е н и й. Предположим, что уравнения (2) обладают свойством равномерной положительной устойчивости, т. е. семейство преобразований $T_h(t)$ $(t \geqslant 0,\ h \in G)$ сильно равностепенно непрерывно. Одного этого условия, по-видимому, совершенно недостаточно для выделения п.п. решений. Ниже рассматриваются две специальные формы устойчивости; с одной из них связан метод сжимающих операторов сдвига, с другой — теоремы типа первой теоремы Фавара.

Т е о р е м а 2. *Пусть выполнены условия* a, c *и*

$$\varphi(T_h(t)u_1,\ T_h(t)u_2) \leqslant \varphi(u_1,\ u_2) \qquad (t \geqslant 0,\ u_1,\ u_2 \in B), \tag{2}$$

где $\varphi(u_1, u_2)$ *сильно непрерывна на* $B \times B$ *и удовлетворяет условиям:*

1) $\varphi(u_1, u_2) = 0$, *если только* $u_1 = u_2$,

2) $\varphi(u_1,\ \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) + \varphi(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2,\ u_2) = \varphi(u_1,\ u_2)$, *где* $\alpha_1,\ \alpha_2 \geqslant 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$,

3) $\varphi(u_1, p) + \varphi(p, u_2) > \varphi(u_1, u_2)$, *если* $p \overline{\in} [u_1, u_2]$.

Тогда, если уравнение (1) *имеет компактное при* $t \geqslant 0$ *решение, то оно имеет хотя бы одно п.п. решение.*

Отметим, что в приложениях в качестве функции обычно φ берется $\|u_1 - u_2\|$, если только норма строго выпукла.

Т е о р е м а 3. *Пусть выполнено неравенство* (2) *для функции* $\varphi(u_1 u_2)$ *со свойствами* 1), 2), 3) *и уравнение* (1) *имеет слабо компактное при* $t \geqslant 0$ *решение. Тогда, если операторы* $T_h(t)$ *слабо непрерывны при любом* $t \geqslant 0$, *то уравнение* (1) *имеет хотя бы одно п.п. решение.*

Теорема 3 сводится к теореме 2 путем доказательства существования компактного решения. Это достигается с помощью следующей леммы (см. [8]).

Л е м м а. *Если операторы* $T_h(t)$ $(t \geqslant 0,\ h \in G)$ *слабо непрерывны, выполнено условие* c_1 *и*

$$\sup_{t \geqslant 0} \| T_h(t) u_1 - T_h(t) u_2 \| \leqslant l \| u_1 - u_2 \| \ (l < \infty,\ h \in G),$$

то всякое слабо рекуррентное решение компактно.

Рассматривая вместо уравнения (1) степени одного преобразования T, получаем новые признаки существования неподвижной точки сжатия банахова пространства со строго выпуклой нормой. Предполагается, что T определено на всем B и выполнено условие единственности, т. е. $Tu_1 \neq Tu_2$, если $u_1 \neq u_2$.

Т е о р е м а 4. *Сжатие* T *имеет хотя бы одну неподвижную точку, если найдется элемент* $u_0 \in B$, *для которого множество* $\{T^m u_0\}$, *где* $m > 0$, *компактно. Если же* T *слабо непрерывно, то для этого достаточно слабой компактности того же множества.*

Сформулируем теперь «сильный» вариант первой теоремы Фавара.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* a, c *и для всякого* $M > 0$

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{h\in G,\ \|u_1\|,\ \|u_2\|\leqslant M} \| T_h(t)\, u_1 - T_h(t)\, u_2 \| = 0. \tag{3}$$

Тогда, если уравнение (1) *имеет ограниченное при* $t \geqslant 0$ *решение, то оно имеет единственное п.п. решение.*

Отметим, что если уравнение (1) линейно, то условие существования ограниченного решения излишне — оно вытекает из (3). Имеет место и более общее утверждение для линейных уравнений.

Теорема 6. *Если* B *рефлексивно, преобразования* $V_h(t)$ $(t \geqslant 0,$ $h \in G)$ *слабо равностепенно непрерывны на единичном шаре и однородное уравнение* (1) *не имеет ограниченных решений, то уравнение* (1) *имеет единственное слабо п.п. решение.*

4. Приложения. В банаховом пространстве B со строго выпуклым сопряженным B^* рассмотрим уравнение

$$u' + Au = f(t), \tag{4}$$

где A монотонен в смысле Като ([12]), $\sup\limits_{t\in I}\|f(t)\| < \infty$ и $f(t)$ — п.п. функция в $L_2(0,\ 1,\ B)$. Положим $\Phi_1(u) = \operatorname{Re}\langle Au,\ F(u)\rangle$, $\Phi_2(u_1,\ u_2) = \operatorname{Re}\langle Au_1 - Au_2,\ F(u_1 - u_2)\rangle$, где $F\colon\ B \to B^*$, $\|F(u)\| = \|u\|$, $\langle u,\ F(u)\rangle = \|u\|^2$.

Допустим, что выполнено условие $\lim\limits_{s\to\infty} 1/s \inf\limits_{\|u\|\geqslant s} \Phi_1(u) = +\infty$.

Теорема 7. *Пусть имеется банахово пространство* $B_1 \subset B$ *с вполне непрерывным вложением и оценка*

$$\Phi_1(u) \geqslant C_1 \| u \|_1^2 - C_2 \| u \|^2 \ (C_1, C_2 > 0).$$

Тогда уравнение (4) *имеет хотя бы одно п.п. решение.*

Теорема 8. *Если имеет место неравенство*

$$\Phi_2(u_1,\ u_2) \geqslant C(R)\,\|u_1 - u_2\|^2 (\|u_1 - u_2\| \leqslant R,\ R, C(R) > 0),$$

то уравнение (4) *имеет единственное п.п. решение. Это решение удовлетворяет уравнению* (4) *в обычном смысле, если* $f(t)$ *удовлетворяет условию Липшица* $\|f(t_1) - f(t_2)\| \leqslant L|t_1 - t_2|$.

Теоремы 7 и 8 справедливы и в случае, когда A зависит от t, но формулировки слишком громоздки.

Рассмотрим теперь в гильбертовом пространстве уравнение

$$u'' + B(u') + A^2 u = f(t), \tag{5}$$

где A — положительно определенный оператор $\sup\limits_{t\in I}\|f(t)\| < \infty$, $f(t)$ — п.п. функция в $L_2(0,\ 1,\ H)$, а нелинейный оператор B удовлетворяет следующим условиям:

1) $D(B) \supseteq D(A_m)$ при некотором $m > 0$, $(Bu_1 - Bu_2,\ u_1 - u_2) \geqslant 0$ при $u_1,\ u_2 \in D(B)$;

2) оператор $A^{-m}BA^{-1}$ расширяется до непрерывного преобразования $H \to H$.

Обозначим через H_A гильбертово пространство элементов $u \in D(A)$ с нормой $\|u\|_A = \|Au\|$. В пространстве энергий $E = H \times H_A$, уравнение (5) сводится к уравнению $z' + \tilde{A}z = \tilde{f}(t)$, причем оператор $\tilde{A}$ после некоторой процедуры замыкания (или расширения) является монотонным по Като. Исходя из решений Като, строятся обобщенные решения для всякого $z(0) \in E$.

Допустим далее, что существует рефлексивное банахово пространство $D(A^m) \subseteq B_1 \subseteq H$ с нормой $\|u\|_1$, такое, что оператор $A^{-1}B$ расширяется до ограниченного и непрерывного преобразования $K\colon B_1 \to H$, причем на ограниченных в B_1 множествах K действует H_A — непрерывно в H.

Пусть $\alpha_1(s) = \inf\limits_{\|u\|_1 \geqslant s} (Bu, u)$, $\alpha_2(s) = \inf\limits_{\|u_1 - u_2\| \geqslant s} (Bu_1 - Bu_2, u_1 - u_2)$. $\|Ku\| \leqslant \beta(\|u\|_1)\beta_2(\|u\|)$, $\|Ku_1 - Ku_2\| \leqslant \gamma_1(\|u_1 - u_2\|_1) \cdot \gamma_2(\|u_1 - u_2\|)$, где функции β_i, γ_i $(i = 1, 2)$ непрерывны на $[0, \infty)$.

Теорема 9. *Пусть* $\lim\limits_{s \to \infty} \alpha_1 / s = +\infty$,

$$\lim_{s \to \infty} \beta_1/\alpha_1 < \infty, \quad \lim_{s \to \infty} \beta_2/s = 0.$$

Тогда для всякого решения $u(t)$ выполняется неравенство $\sup\limits_{t \in I} \|u(t)\|_E^2 \leqslant \|u(0)\|_E^2 + C$, где C не зависит от решений. Если, кроме того, вложение $B_1 \to H$ вполне непрерывно, то уравнение (5) *имеет хотя бы одно E-п.п. решение.*

Теорема 10. *Пусть* $\lim\limits_{s \to \infty} \alpha_1 / s = +\infty$,

$$\lim_{s \to \infty} \beta_1/\alpha_1 < \infty, \quad \lim_{s \to \infty} \beta_2/s = 0,$$

$$\lim_{s \to \infty} \gamma_1/\alpha_2 < \infty, \quad \lim_{s \to \infty} \gamma_2/s = 0.$$

Тогда, если оператор A^{-1} вполне непрерывен, $\alpha_2(s) \neq 0$ при $s \neq 0$ и функция $f(t)$ равномерно непрерывна на всей оси, то уравнение (5) *имеет единственное E-п.п. решение. Это решение удовлетворяет уравнению* (5) *в обычном смысле, если $B_1 \subseteq H_A$, $\alpha_2(s) \geqslant Cs^2$* $(C > 0,\ 0 \leqslant s \leqslant 1)$ *и $f(t)$ удовлетворяет условию Липшица.*

Отметим, что из теоремы 10 легко вытекают тонкие результаты Прауза ([11]). Отметим также, что если $f(t)$ — периодическая функция, то решения, даваемые теоремами 7—10, имеют тот же период. Несомненно, что эти результаты о периодических решениях (даваемые, например, теоремой 9 для эвклидова пространства) трудно получить на основе известных принципов неподвижной точки.

Примечание при корректуре. Сделаем два замечания по поводу теории Фавара.

1. Пусть R — полное метрическое пространство с метрикой ρ и S_t — система на $R \times H$ в смысле п. 1. Имеет место следующий «принцип сжатых отображений» (для сравнения см. теоремы 5 и 8): если при некотором $t_0 > 0$ выполнено неравенство

$$\rho(S_h(t_0)u_1, S_h(t_0)u_2) \leqslant q\rho(u_1, u_2) \quad (q < 1,\ h \in G),$$

то уравнение (1) имеет единственное п.п. решение.

2. Пусть B — произвольное пространство Банаха, уравнение (1) линейно и обладает свойством равномерной положительной устойчивости, т. е. $\sup\limits_{t \geqslant 0,\, h \in G} \|V_h(t)\| \leqslant l < \infty$. Тогда уравнение (1) имеет п.п. решение, если только оно имеет слабо компактное решение (доказательство в ([8])). Это утверждение более общее, чем то, что вытекает из теоремы 3.

Владимирский
политехнический институт

Поступило
21 IV 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Favard, Lecons sur fonction presque periodiques, Gathie — Villar, Paris, 1933. [2] Б. М. Левитан, Почти-периодические функции, М., 1953. [3] В. М. Миллионщиков, ДАН, 161, № 1 (1965). [4] Б. А. Щербаков, ДАН, 167, № 5 (1966). [5] G. R. Sell, Trans. Am. Math. Soc., 127, 224 (1967). [6] С. Л. Соболев, ДАН, 18, № 8, 570 (1945). [7] В. В. Жиков, Сборн. научн. тр. Владимирск. вечерн. политехн. инст., № 8, 1969, стр. 97. [8] В. В. Жиков, Функциональный анализ и его приложения, 1, в. 1 (1971). [9] В. В. Жиков, Сборн. Теория функций и ее приложения, Харьков, № 4, 1967, стр. 176. [10] L. Amerio, Boll. Un. Math. Ital., 20, 287 (1965). [11] G. Prouse, Rend. Acc. Naz. Lincei, 1965, p. 38. [12] T. Kato, J. Math. Soc. Japan, 19, № 4, 208 (1967).