В данной работе мы получили парциальные волны в двумерном релятивистском конфигурационном представлении, выраженные через присоединённые функции Лежандра первого и второго рода.

Литература

1. Nagiyev, S. M. The relativistic two-dimensional harmonic oscillator / S. M. Nagiyev, E. I. Jafarov, M. Y. Efendiyev // IL Nuovo Cimento. – 2009. – 124 B. – p. 395–403.
2. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и производных / И. С. Градштейн. – СПб.: БХВ-Петербург: 7-е изд, 2011. – 1232 с.

А. В. Павленко[1, 2]
(ГГУ имени Ф. Скорины, Гомель[1]
Гомельский государственный медицинский университет, Гомель[2])
Науч. рук. **В. Н. Капшай[1]**, канд. физ.-мат. наук, доцент

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЛОГУНОВА-ТАВХЕЛИДЗЕ С РЕЛЯТИВИСТСКИМ АНАЛОГОМ ПОТЕНЦИАЛА ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Двумерное уравнение Логунова-Тавхелидзе, описывающее связанные состояния системы двух скалярных частиц одинаковой массы $m,$ в импульсном представлении имеет следующий вид:

$$(E^2-m^2-\mathbf{p}^2)\,\psi(\mathbf{p})=\frac{1}{(2\pi)^2}\int V(\mathbf{p},\mathbf{k})\psi(\mathbf{k})\frac{m}{E_k}d^2k,\; E_k=\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}\,, \tag{1}$$

где $2E$ – энергия системы,

$\mathbf{p}$ – относительный импульс в системе центра масс;

$\psi(\mathbf{p})$ – волновая функция;

$V(\mathbf{p},\mathbf{k})$ – потенциал.

Нерелятивистский потенциал гармонического осциллятора имеет следующий вид

$$V(\rho)=\omega^2\rho^2, \tag{2}$$

где ω – константа связи;

$\rho\ge 0$ – модуль двумерного радиус-вектора $\boldsymbol{\rho}$ в координатном представлении.

Используя двумерное преобразование Фурье для потенциала (2), получим его выражение в импульсном представлении:

$$V(\mathbf{p},\mathbf{k})=-(2\pi)^2\omega^2\Delta_p\delta(\mathbf{p}-\mathbf{k}), \tag{3}$$

где Δ_p – оператор Лапласа на плоскости импульсов;

$\delta(\mathbf{p}-\mathbf{k})$ – двумерная дельта-функция.

Для получения одного из вариантов релятивистского обобщения потенциала (3) преобразуем его, заменив разность импульсов $\mathbf{p}-\mathbf{k}$ в евклидовом пространстве на разность $\mathbf{p}(-)\mathbf{k}$, заданную в импульсном пространстве Лобачевского [1]:

$$\mathbf{p}(-)\mathbf{k}=\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{m}\left[E_p-\frac{\mathbf{pk}}{E_k+m}\right],\, E_p=\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}. \tag{4}$$

В результате получим релятивистский аналог потенциала (3)

$$V\,(\mathbf{p},\mathbf{k})=-(2\pi)^2\omega^2\Delta_p\left[\delta\big(\mathbf{p}(-)\mathbf{k}\big)\right]=-(2\pi)^2\omega^2\Delta_p\left[\frac{E_p}{m}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{k})\right]. \tag{5}$$

Нетрудно видеть, что нерелятивистский предел (предел при $m\to\infty$) выражения (5) приводит к потенциалу (3). Подстановка потенциала (5) в уравнение (1) и интегрирование с учетом свойств дельта-функции [2] приводит к следующему дифференциальному уравнению в частных производных:

$$\left(E^2-m^2-p^2\right)\psi(\mathbf{p})=-\omega^2\Delta_p\psi(\mathbf{p}), \tag{6}$$

где $p = |\mathbf{p}|$;

Δ_p – двумерный оператор Лапласа.

Упростим уравнение (6), представив искомую волновую функцию в форме

$$\psi(\mathbf{p})=\frac{1}{\sqrt{p}}\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\psi_\mu(p)\exp(i\mu\varphi), \tag{7}$$

где φ – полярный угол;

$\psi_\mu(p)$ – парциальные волновые функции.

Подстановка ряда (7) в уравнение (6) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению для парциальной волновой функции:

$$\left(\frac{d^2}{dp^2}+\frac{1/4-\mu^2}{p^2}+\frac{1}{\omega^2}\left(E^2-m^2\right)-\frac{1}{\omega^2}p^2\right)\psi_\mu(p)=0. \tag{8}$$

Решение уравнения (8) имеет следующий вид [3]:

$$\psi_\mu(p)=C_\mu\, p^{\frac{1}{2}+|\mu|}\exp\left(-\alpha\frac{p^2}{2}\right){}_1F_1\left(\frac{1}{2}-\frac{\beta}{4}+\frac{|\mu|}{2},|\mu|+1,\alpha p^2\right),\,\alpha=\frac{1}{\omega}, \tag{9}$$

где $\beta=\alpha\left(E^2-m^2\right)$;

C_μ – произвольная константа;

${}_1F_1(a,b,x)$ – вырожденная гипергеометрическая функция [4].

Для того чтобы волновая функция (9) была конечна при любых значениях переменной p, надо потребовать выполнение следующего условия:

$$1/2-\beta/4+|\mu|/2=-n, \quad n=0,1,2... \tag{10}$$

Учитывая обозначения, введенные в формуле (9), получим из равенства (10) условие квантования энергии системы двух частиц

$$2E=2\sqrt{2\omega\left(2n+|\mu|+1\right)+m^2}. \tag{11}$$

Наличие условия (10) приводит к тому, что вырожденная гипергеометрическая функция в формуле (9) преобразуется в обобщенный полином Лагерра [4]. Таким образом, волновая функция (9) представима в форме

$$\psi_{\mu,n}\left(p\right)=C_{\mu,n}\frac{n!|\mu|!}{(|\mu|+n)!}\,p^{\frac{1}{2}+|\mu|}\exp\left(-\frac{1}{\omega}\frac{p^2}{2}\right)L_n^{|\mu|}\left(\frac{1}{\omega}p^2\right). \tag{12}$$

Для определения константы $C_{\mu,n}$ воспользуемся условием нормировки парциальных волновых функций

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\left|\psi_{\mu,n}\left(p\right)\right|^2dp=1. \tag{13}$$

Подстановка волновой функции (12) в условие (13) и последующее вычисление интеграла [5] приводит к следующему выражению для нормировочной константы:

$$C_{\mu,n}=\left(\frac{4\pi\left(1/\omega\right)^{|\mu|+1}(|\mu|+n)!}{n!}\right)^{1/2}\frac{1}{|\mu|!}. \tag{14}$$

Таким образом, в работе получено точное решение двумерного уравнения Логунова-Тавхелидзе для релятивистского аналога потенциала гармонического осциллятора в импульсном представлении. Найдены точные парциальные волновые функции и условие квантования энергии двухчастичной системы.

Литература

1. Кадышевский, В. Г. Трехмерная формулировка релятивистской проблемы двух тел / В. Г. Кадышевский, Р. М. Мир-Касимов, Н. Б. Скачков // ЭЧАЯ. 1972. – Т. 2. Вып. 3. С. 635–690.

2. Гельфанд, И. М. Обобщенные функции и действия над ними / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. – М.: Добросвет, 2000. – 412 с.

3. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – Санкт-Петербург: 6 изд. Издательство «Лань», 2003 – 576 с.

4. Абрамовиц, М. Справочник по специальным функциям: с формулами, графиками и математическими таблицами. / М. Абрамовиц, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

5. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и производных / И. С. Градштейн. – СПб. : БХВ-Петербург: 7-е изд, 2011. – 1232 с.