Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 3

УДК 517.925 МАТЕМАТИКА

В. М. ЧЕРЕСИЗ

О РАВНОМЕРНОМ ПРИТЯЖЕНИИ В ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 22 VI 1970)

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = F(x, t) \tag{1}$$

с вектор-функцией $F(x, t)$, удовлетворяющей локальным теоремам существования и единственности в цилиндре $C_G = G \times I$ ($G \subset R^n$, область n-мерного эвклидова пространства, I — временная ось $(-\infty < t < +\infty)$). Решение $\Phi(t)$ $(t \geqslant 0)$ обладает $\Delta_{[0,\infty)}$-трубкой притяжения, если $\|x(t, x_0, t_0) - \Phi(t)\| \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ для всех $(x_0, t_0) \in \Delta_{[0,\infty)} = \{0 \leqslant t_0 < \infty, \|x_0 - \Phi(t_0)\| < \Delta = \mathrm{const} > 0\}$ (т. е. область притяжения не сужается неограниченно с ростом t). Пусть $F(x, t)$ ω-периодична по t $(\omega > 0)$

$$F(x, t + \omega) \equiv F(x, t), \quad x \in G, \ t \in I. \tag{2}$$

Мы рассмотрим вопрос о соотношении понятий равномерной асимптотической устойчивости (р.а.у.) ([2]) и равномерной устойчивости по Ляпунову (р.у.л.) ([1]) для ограниченных решений периодических систем.

Решение $\Phi(t)$ назовем р.а.у., если дополнительно к обычным требованиям определения асимптотической устойчивости ([1]) имеет место притяжение к $\Phi(t)$, равномерное относительно всех (x_0, t_0) из некоторой замкнутой $\bar{\Delta}_{[0,\infty)}$ — трубки, т. е. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists T(\varepsilon) > 0$ (общее для всех $(x_0, t_0) \in \bar{\Delta}_{[0,\infty)} = \{0 \leqslant t_0 < \infty, \|x_0 - \Phi(t_0)\| \leqslant \bar{\Delta}\}$) такое, что $\|x(t, x_0, t_0) - \Phi(t)\| < \varepsilon$, если только $t \geqslant t_0 + T(\varepsilon)$. Итак, пусть $\Phi(t)$ обладает Δ-трубкой притяжения. Тогда имеет место следующая

Теорема 1. *Для того чтобы ограниченное для $t \geqslant 0$ решение $\Phi(t)$ ω-периодической системы было р.а.у., необходимо и достаточно* ([3]), *чтобы оно было р.у.л.*

Лемма. *Если р.у.л. решение обладает $\Delta_{[0,\infty)}$-трубкой притяжения, то из любого конечного куска $\bar{\Delta}_{[0,L]}$* замкнутой $\Delta_{[0,\infty)}$-*трубки притяжение оказывается равномерным*

$$(\bar{\Delta}_{[0,L]} = \{(x_0, t_0),\ 0 \leqslant t_0 \leqslant L,\ \|x_0 - \Phi(t_0)\| < \bar{\Delta} < \Delta\}).$$

Это очевидно, если учесть компактность $\bar{\Delta}_{[0,L]}$ и непрерывную зависимость от начальных данных.

Замечание. Можно доказать равномерность притяжения из любого конечного куска некоторой $\bar{\Delta}$-трубки $(\bar{\Delta} < \Delta)$ в предположении, что $F(x, t)$ удовлетворяет лишь локальной теореме существования (например, $F(x, t)$ лишь непрерывная в C_G), не требуя выполнения теоремы единственности. Действительно, возьмем в качестве $\bar{\Delta}$ число $\delta(\Delta^*)$, $(\Delta^* < \Delta)$ из определения р.у.л. и покажем, что притяжение равномерно из любого конечного куска $[0 \leqslant t_0 \leqslant L]$ $\delta(\Delta^*)$-трубки. Предположив противное, получим для $\varepsilon > 0$ $\exists \{(x_n, t_n)\} \in \delta(\Delta^*)_{[0,L]}$ и $T_n \geqslant n$ такие, что

$$\|x(t_n + T_n, x_n, t_n) - \Phi(t_n + T_n)\| \geqslant \varepsilon; \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Все решения $x(t, x_n, t_n)$ определены, по крайней мере, для $t \in [L, \infty)$, и в то же время не покидают Δ^*-трубку решения $\Phi(t)$, так как $(x_n, t_n) \in \delta(\Delta^*)$-трубке. Значит, на каждом отрезке $[L, L + k]$, $k = 1, 2, \ldots$, они ограничены в совокупности: $\|x(t, x_n, t_n)\| \leqslant M_k$, $L \leqslant t \leqslant L + k$, быть может, становясь неограниченными в целом на $[L, \infty)$, если $\Phi(t)$ неограниченно на $[0, \infty)$. Так как $F(x, t)$ ограничена в каждом конечном куске Δ^*-трубки, то семейство решений $\{x(t, x_n, t_n)\}$ компактно на каждом отрезке $[L, L + k]$. Диагональный процесс дает подпоследовательность $\{x(t, x_{n_m} t_{n_m})\}$, сходящуюся равномерно на каждом $[L, L + k]$ к некоторому решению $x^*(t)$. Очевидно, $x^*(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} \Phi(t)$. Это с учетом (3) приведет к противоречию.

Доказательство теоремы. Достаточность. Пусть теперь $\Phi(t)$ — ограниченное р.у.л. решение ω-периодической системы, притягивающее из $\Delta_{[0, \infty)}$-трубки. Покажем, что протяжение оказывается равномерным из любой $\bar{\Delta}_{[0, \infty)}$-трубки $(\bar{\Delta} < \Delta)$. Для этого возьмем любое $\bar{\bar{\Delta}}$ $(\bar{\Delta} < \bar{\bar{\Delta}} < \Delta)$ и разобьем $\bar{\bar{\Delta}}_{[0, \infty)}$-трубку на участки $\bar{\bar{\Delta}}_{[0, \omega]}$, $\bar{\bar{\Delta}}_{[\omega, 2\omega]}$, $\bar{\bar{\Delta}}_{[2\omega, 3\omega]}, \ldots$ По лемме для каждого такого участка есть свои времена $\bar{\bar{T}}_0(\varepsilon)$, $\bar{\bar{T}}_1(\varepsilon)$, $\bar{\bar{T}}_2(\varepsilon)$ такие, что $\|x(t, x_0, t_0) - \Phi(t)\| < \varepsilon$ для $t \geqslant t_0 + \bar{\bar{T}}_k(\varepsilon)$, если только $(x_0, t_0) \in \bar{\bar{\Delta}}_{[k\omega, (k+1)\omega]}$. Рассмотрим теперь наряду с $\Phi(t) \equiv \Phi_0(t)$ счетное множество решений $\{\Phi_k(t)\}$; $k = 1, 2, \ldots$, такие, что $\Phi_k(0) = \Phi(kw)$. Ввиду ω-периодичности системы, очевидно, $\Phi_k(t) \equiv \Phi(t + k\omega)$, $t \geqslant 0$, $k = 1, 2, \ldots$, причем все $\Phi_k(t)$ имеют такие же как у $\Phi(t)$ (для $t \geqslant k\omega$) Δ-трубки асимптотического притяжения и все $\Phi_k(t)$ р.у.л. с общей для всех их функций $\delta(\varepsilon)$ решения $\Phi(t)$. Для каждого из этих решений мы уже построили равномерное на $[0, \omega]$ время $\bar{\bar{T}}_k(\varepsilon)$, поэтому нам надо доказать наличие общего времени для всех $\Phi_k(t)$, но уже для (x_0, t_0) из конечных кусков $[0 \leqslant t_0 \leqslant \omega]$ их $\bar{\Delta}$-трубок. Тем самым оно будет годиться для $\Phi(t)$ на всем бесконечном участке $[0, \infty)$ его $\bar{\Delta}$-трубки. Фиксируем любую $(\cdot) x^* \in S = \{\Phi_j(0)\}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ По числу $\rho = \bar{\bar{\Delta}} - \bar{\Delta}$ выберем $\delta(\rho)$ из р.у.л., равностепенной для всех $x \in S$. Рассмотрим теперь любую $(\cdot) \tilde{x} = \Phi_j(0) \in S$ и лежащую в $\delta(\rho)$-окрестности $(\cdot) x^*$. Тогда получим

$$\|x(t, \tilde{x}, 0) - x(t, x^*, 0)\| < \rho, \quad t \geqslant 0. \tag{4}$$

Пусть $(x_0, t_0) \in \bar{\Delta}_{[0, \omega]}$-трубке решения $x(t, \tilde{x}, 0)$. Тогда ввиду (4) и так как $\delta(\rho) \leqslant \rho < \Delta$, то $(\tilde{x}, 0)$ и (x_0, t_0) одновременно оказываются в $\bar{\bar{\Delta}}_{[0, \omega]}$-трубке решения $x(t, x^*, 0)$. Пусть теперь $\varepsilon > 0$ и $\bar{\bar{T}}(x^*, \varepsilon / 2)$ — построенное выше, тогда

$$\|x(t, x_0, t_0) - x(t, x^*, 0)\| < \varepsilon / 2,$$

$$\|x(t, \tilde{x}, 0) - x(t, x^*, 0)\| < \varepsilon / 2,$$

$$t \geqslant t_0 + \bar{\bar{T}}(x^*, \varepsilon / 2).$$

Поэтому $\|x(t, x_0, t_0) - x(t, \tilde{x}, 0)\| < \varepsilon$, $t \geqslant t_0 + \bar{\bar{T}}(x^*, \varepsilon / 2)$. Итак, для всех $(\cdot) \tilde{x} \in S$ из $\delta(\rho)$-окрестности точки x^* мы нашли время $\bar{T}(\tilde{x}, \varepsilon) = \bar{\bar{T}}(x^*, \varepsilon / 2)$ попадания из $\bar{\Delta}_{[0, \omega]}$-трубки решения $x(t, \tilde{x}, 0)$ в ε-трубку этого решения, общее для всех x из $\delta(\rho)$-окрестности точки x^* (в том числе и для $(\cdot) x^*$). Оказалось, что $\forall x^* \in S$ покрыта своей окрестностью, общего для всех x^* радиуса $\delta(\rho)$, значит, можно выбрать конечное покрытие. Тогда наибольшее из времен этого конечного покрытия годится в качестве $\bar{T}(\varepsilon)$ одновременно для всех $x^* \in S$, т. е. $\|x(t, x_0, t_0) - x(t, x^*, 0)\| < \varepsilon$ для $t \geqslant t_0 + \bar{T}(\varepsilon)$, если только $\|x_0 - x(t_0, x^*, 0)\| \leqslant \bar{\Delta}$, $0 \leqslant t_0 \leqslant \omega$. А это эквивалентно тому, что $\Phi(t)$ притягивает равномерно из своей $\bar{\Delta}_{[0, \infty)}$-трубки. Достаточность доказана.

Равномерность притяжения из некоторой $\bar{\Delta}_{[0, \infty)}$-трубки решения $\Phi(t)$ легко доказать и для систем без единственности, если учесть замечание, помещенное в конце леммы. Действительно, в качестве $\bar{\Delta}$ достаточно взять любое число, меньшее $\delta(\Delta^*)$, $\Delta^* < \Delta$. Тогда в качестве $\bar{\bar{\Delta}}$ в предыдущих рассуждениях годится $\delta(\Delta^*)$. Таким образом, достаточность имеет место и для систем без единственности.

Необходимость. Пусть $\Phi(t)$ — ограниченное решение, равномерно притягивающее из некоторой $\bar{\Delta}$-трубки. Покажем, что оно р.у.л., т. е. по $\varepsilon > 0$ построим $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\|x(t, x_0, t_0) - \Phi(t)\| < \varepsilon$ для $t \geqslant t_0$, если только $0 \leqslant t_0 < \infty$ и $\|x_0 - \Phi(t_0)\| < \delta(\varepsilon)$. Из равномерности притяжения следует, что для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists T(\varepsilon) > 0$ такое, что $\|x(t, x_0, t_0) - \Phi(t)\| < \varepsilon$ для $t \geqslant t_0 + T(\varepsilon)$, если $(x_0, t_0) \in \bar{\Delta}_{[0,\infty)}$-трубке $\Phi(t)$. Покажем теперь, что $\exists \delta(\varepsilon)_{[0,\infty)}$-трубка решения $\Phi(t)$ такая, что для всех (x_0, t_0) из нее будет $\|x(t, x_0, t_0) - \Phi(t)\| < \varepsilon$ для $t_0 \leqslant t \leqslant T(\varepsilon)$. Предположим противное. Тогда $\exists \varepsilon > 0$ и последовательность $\{(x_n, t_n)\}$, $n = 1, 2, \ldots$, такая, что $\|x_n - \Phi(t_n)\| < {}^1/_n$, но есть моменты $0 \leqslant T_n \leqslant T(\varepsilon)$ такие, что

$$\|x(t_n + T_n, x_n, t_n) - \Phi(t_n + T_n)\| \geqslant \varepsilon. \tag{5}$$

Пусть $\tau_n = t_n (\mathrm{mod}\ \omega)$ и рассмотрим две последовательности точек $\{(\Phi(t_n), \tau_n)\}$ и $\{(x_n, \tau_n)\}$, $0 \leqslant \tau_n \leqslant \omega$. С учетом ω-периодичности $F(x, t)$ получаем

$$\begin{gathered} x(t + \tau_n, x_n, \tau_n) \equiv x(t + t_n, x_n, t_n), \\ x(t + \tau_n, \Phi(t_n), \tau_n) \equiv \Phi(t + t_n). \end{gathered} \tag{6}$$

Из ограниченной последовательности $\{(\Phi(t_n), \tau_n)\}$ выберем сходящуюся подпоследовательность $\{(\Phi(t_{n_k}), \tau_{n_k})\}_{k\to\infty} \rightrightarrows (x^*, \tau^*)$ $(0 \leqslant \tau^* \leqslant \omega)$, тогда $\{(x_{n_k}, \tau_{n_k})\}_{k\to\infty} \rightrightarrows (x^*, \tau^*)$. Ввиду непрерывной зависимости от начальных данных решение $x(t, x^*, \tau^*)$ определено и ограничено для $t \geqslant 0$ (так как все $x(t, \Phi(t_n), \tau_n$ равномерно ограничены для $t \geqslant 0$ и вместе со своими $\bar{\Delta}$-трубками лежат в C_G), и обе последовательности решений $\{x(t, x_{n_k}, \tau_{n_k})\}$ и $\{x(t, \Phi(t_{n_k}), \tau_{n_k})\}$ сходятся к $x(t, x^*, \tau^*)$ равномерно на каждом отрезке $[0, T]$, а это противоречит (5) с учетом (6) при $T = T(\varepsilon)$. Теорема доказана. Таким образом, при доказательстве необходимости мы существенно использовали непрерывную зависимость от начальных данных.

Замечание. Р.у.л. решение $\Phi(t)$ $(t \geqslant 0)$ оказывается ограниченным, если ограничено множество $\Phi(k\omega)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Действительно, если оказалось $\|\Phi(t_n)\| > n$, $k_n\omega \leqslant t_n \leqslant (k_n + 1)\omega$, то рассмотрим последовательность решений $\Phi_n(t) \equiv \Phi(k_n\omega + t)$. Все они р.у.л. с общей функцией $\delta(\varepsilon)$ и $\|\Phi_n(t_n - k_n\omega)\| > n$. Из ограниченного множества $\{\Phi_n(0)\} = \{\Phi(k_n\omega)\}$ выберем сходящуюся подпоследовательность (считаем, что уже $\Phi_n(0) \underset{\infty}{\to} x^*$). Зафиксируем $\delta(\varepsilon)$ и найдем N такой, что $\|\Phi_N(0) - x^*\| < \delta(\varepsilon)/2$. Тогда ввиду р.у.л. решения $\Phi_N(t)$ будет $\|\Phi_N(t) - \Phi_N(t)\| < \varepsilon$, $t \geqslant 0$ для всех n таких, что $\|\Phi_n(0) - x^*\| < \delta(\varepsilon)/2$. Но решение $\Phi_N(t)$ ограничено на $[0, \omega]$, получили противоречие. При этом нам не нужна непрерывная зависимость от начальных данных.

Аналогично, если решение $\Phi(t)$ имеет $\Delta_{[0,\infty)}$-трубку притяжения и есть непрерывная зависимость от начальных данных, то справедливо то же утверждение. Действительно, решение $x(t, x^*, 0)$ из предыдущего рассуждения не может быть продолжено на $[0, \omega]$ из-за непрерывной зависимости от начальных данных и неограниченности $\{\Phi_n(t)\}$ на $[0, \omega]$. Но с другой стороны, если $\|\Phi_{\bar{n}}(0) - x^*\| < \Delta$, то x^* оказывается в Δ-трубке решения $\Phi_{\bar{n}}(t)$ и, значит, $x(t, x^*, 0)$ обязано продолжаться на $[0, \infty)$. Таким образом, в формулировке теоремы можно требовать лишь ограниченность $\{\Phi(k\omega)\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Отметим, что в условиях теоремы требуется наличие трубки притяжения, не сужающейся неограниченно при $t \to +\infty$ (это входит в определение р.а.у). Это требование существенно, так как наличие такой трубки не обеспечивается периодичностью $F(x, t)$, ограниченностью $\Phi(t)$ и его равномерной устойчивостью по Ляпунову, что видно из следующего простого примера

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t) \equiv \begin{cases} -x, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0; \end{cases} \qquad (x, t) \in R^2.$$

Ограниченное для $t \geqslant 0$ решение $\Phi(t) = e^{-t}$ этого уравнения р.у.л., но трубка притяжения сужается до нуля при $t \to +\infty$.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
8 VI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. П. Демидович, Лекции по математической теории устойчивости, «Наука», 1967. [2] Н. Н. Красовский, Некоторые задачи теории устойчивости движения, М., 1959. [3] В. М. Чересиз, ДАН, 173, № 2 (1967).