Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 3

УДК 517.946 *МАТЕМАТИКА*

С. Я. ЯКУБОВ

РЕШЕНИЕ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ОПЕРАТОРНЫМ МЕТОДОМ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 14 V 1970)

В статье выделены два класса эволюционных уравнений, для которых доказана разрешимость задачи Коши. Эти классы соответствующим образом определяют два класса дифференциальных уравнений в частных производных, для которых ставится и решается смешанная задача в цилиндрических областях. Показывается также, что некоторые уравнения типа Соболева принадлежат к первому классу.

1. Рассмотрим задачу Коши для линейного эволюционного уравнения m-го порядка

$$u^{(m)}(t)+\sum_{k=1}^{m}A_k(t)\,u^{(m-k)}(t)=f(t),\quad u^{(k)}(0)=u_k,\quad k=0,\ldots,m-1,\tag{1}$$

где $A_k(t)$, вообще говоря, неограниченные операторы в гильбертовом пространстве H. Пусть $A_2(t)=A(t)+B(t)$, где $A(t)$ — самосопряженный положительно определенный оператор, $B(t)$ подчинен $A^{1/2}(t)$, т. е. $B(t)A^{-1/2}(t)$ — ограничен. Решением уравнения (1) на $[0, T]$ называется функция $u(t)$ такая, что: 1) функция $u(t)$ m-раз непрерывно дифференцируема на $[0, T]$, 2) $u^{(k)}(t)\in D(A_{m-k}(t))$ $(k=0,\ldots, m-1)$ и функции $A_{m-k}(t)u^{(k)}(t)$ непрерывны на $[0, T]$, 3) $u^{(m-1)}(t)\in D(A^{1/2}(t))$ и функция $A^{1/2}(t)u^{(m-1)}(t)$ непрерывна на $[0, T]$, 4) уравнение (1) удовлетворяется на $[0, T]$.

Введем замену переменных: $v_k(t)=u^{(k+1)}(t)+A(t)u^{(k-1)}(t)$ $(k=1,\ldots,m-2)$; $v_{m-1}(t)={}^1/_2[u^{(m-1)}(t)+iA^{1/2}(t)u^{(m-2)}(t)]$; $v_m(t)={}^1/_2[u^{(m-1)}(t)-iA^{1/2}(t)u^{(m-2)}(t)]$. Эта замена обратима, причем $u^{(m-1)}(t)=v_{m-1}(t)+v_m(t)$; $u^{(m-2)}(t)=-iA^{-1/2}(t)(v_{m-1}(t)-v_m(t))$; $u^{k}(t)=A^{-1}P_{k+1}(t, v_{k+1}(t),\ldots, v_m(t))$ $(k=0,\ldots,m-3)$, где $P_{k+1}(t, v_{k+1},\ldots, v_m)$ являются $(m-k)$-линейными непрерывными операторами. Введенной заменой задача (1) сводится к эквивалентной задаче

$$v'(t)=\mathfrak{A}(t)v(t)+\mathfrak{B}(t)v(t)+F(t),\qquad v(0)=v_0,\tag{2}$$

где $\mathfrak{A}(t)=\begin{pmatrix}0\ .\ .\ .\ .\ 0 & 0 & \\ .\ .\ .\ .\ . & & . \\ 0\ .\ .\ .\ iA^{1/2}(t) & 0 & \\ 0\ .\ .\ .\ \ 0 & & -iA^{1/2}(t)\end{pmatrix}$, а оператор $\mathfrak{B}(t)$ ограничен, если ограничены операторы $A_1(t)$, $B(t)A^{-1/2}(t)$, $A_k(t)A^{-1}(t)$ $(k=3,\ldots,m)$.

Если к задаче (2) применить теорию Т. Като [1], развитую в [2, 3], то получается

Теорема 1. *Пусть $A_2(t)=A(t)+B(t)$; $A(t)$ — самосопряженный положительно определенный оператор с независящей от $t\in[0, T]$ областью определения $D(A(t))=D(A)$; оператор $A(t)A^{-1}(0)$ дважды сильно непрерывно дифференцируем; операторы $A_1(t)$, $B(t)A^{-1/2}(0)$, $A_k(t)A^{-1}(0)$ $(k=3,\ldots,m)$ ограничены и сильно непрерывно дифференцируемы; $f(t)$ — непрерывно дифференцируема; $u_k\in D(A)$ $(k=0,\ldots, m-2)$, $u_{m-1}\in D(A^{1/2})$.*

Тогда задача Коши (1) *имеет единственное решение на* $[0, T]$, *для которого справедлива оценка*

$$\|u^{(m)}(t)\| + \|A^{1/2}(t)\,u^{(m-1)}(t)\| + \sum_{k=0}^{m-2}\|A(t)\,u^{(k)}(t)\| \leqslant$$

$$\leqslant c\,[\,\|A^{1/2}(0)\,u_{m-1}\| + \sum_{k=0}^{m-2}\|A(0)\,u_k\| + \max_{0\leqslant\tau\leqslant t}(\|f(\tau)\| + \|f'(\tau)\|)].$$

Обозначим через $H(A^\alpha)$ гильбертово пространство, состоящее из элементов $D(A^\alpha)$ с нормой $\|u\|_{A^\alpha} = \|A^\alpha(0)u\|$, а через $C^l([0, T];\, H(A^\alpha))$ — банахово пространство, состоящее из l-раз непрерывно дифференцируемых в H функций $u(t)$, l-я производная которых принадлежит $H(A^\alpha)$, с нормой

$$\|u(\cdot)\|_l = \max_{0\leqslant t\leqslant T}\left(\sum_{k=0}^{l-1}\|u^{(k)}(t)\| + \|A^\alpha(0)\,u^l(t)\|\right).$$

2. Введем теперь замену: $v_k(t) = A^{1/2}(0)\,u^{(k-1)}(t)$ $(k = 1, \ldots, m-2)$; $v_{m-1}(t) = 1/2[u^{(m-1)}(t) + iA^{1/2}(t)\,u^{(m-2)}(t)]$; $v_m(t) = 1/2[u^{(m-1)}(t) - iA^{1/2}(t)\,u^{(m-2)}(t)]$, с помощью которой задача (1) сводится к эквивалентной задаче (2), где

$$\mathfrak{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 \ \ldots & 0 & 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 \ \ldots & iA^{1/2}(t) - 1/2A_1(t) & -1/2A_1(t) \\ 0 \ \ldots & -1/2A_1(t) & -iA^{1/2}(t) - 1/2A_1(t) \end{pmatrix},$$

а оператор $\mathfrak{B}(t)$ ограничен, если ограничены операторы $B(t)A^{-1/2}(t)$, $A_k(t)A^{-1/2}(t)$ $(k = 3, \ldots, m)$. Если оператор $A_1(t)$ диссипативен и подчинен оператору $A^{1/2}(0)$, то оператор $\mathfrak{A}(t)$ с областью определения $D(\mathfrak{A}) = H^{m-2}\times D(A^{1/2})\times D(A^{1/2})$ в пространстве H^m является максимальным диссипативным оператором.

Теорема 2. *Пусть* $A_2(t) = A(t) + B(t)$; $A(t)$ — *самосопряженный положительно определенный оператор; либо* $D(A^{1/2}(t)) = D(A^{1/2})$ *не зависит от* t *и оператор* $A^{1/2}(t)A^{-1/2}(0)$ *дважды сильно непрерывно дифференцируем, либо же* $D(A(t)) = D(A)$ *не зависит от* t *и оператор* $A(t)A^{-1}(0)$ *сильно непрерывно дифференцируем; операторы* $B(t)A^{-1/2}(0)$, $A_k(t)A^{-1/2}(0)$ $(k = 1;\, 3, \ldots, m)$ *ограничены и сильно непрерывно дифференцируемы; оператор* $-A_1(t)$ *диссипативен, т. е.* $\mathrm{Re}(A_1(t)u,\, u) \geqslant \omega(u,\, u)$ $(u \in D(A_1(t)))$; $u_k \in D(A^{1/2})$ $(k = 0, \ldots, m-1)$, $u_{m-2} \in D(A(0))$; $f(t) \in C^1([0, T];\, H]$.

Тогда задача Коши (1) *имеет единственное решение на* $[0, T]$, *для которого справедлива оценка*

$$\|u^{(m)}(t)\| + \sum_{k=0}^{m-1}\|A^{1/2}(t)\,u^{(k)}(t)\| + \|A(t)\,u^{(m-2)}(t)\| \leqslant$$

$$\leqslant c\left[\sum_{k=0}^{m-1}\|A^{1/2}(0)\,u_k\| + \|A(0)\,u_{m-2}\| + \max_{0\leqslant\tau\leqslant t}(\|f(\tau)\| + \|f'(\tau)\|)\right].$$

Этот класс уравнений при $m = 2$ подробно исследован в работе автора (4).

3. Рассмотрим в цилиндре $Q = [0, T]\times\Omega$, где ограниченная область $\Omega\subset R^n$ принадлежит классу C^{2p}, уравнение

$$D_t^m u(t, x) + A(t, x)\,D_t^{m-1}u(t, x) + \sum_{|\alpha|\leqslant 2p} A_\alpha(t, x)\,D^\alpha D_t^{m-2}u(t, x) +$$

$$+ \sum_{|\alpha|\leqslant p} B_\alpha(t, x)\,D^\alpha D_t^{m-2}u(t, x) + \sum_{\substack{|\alpha|\leqslant 2p\\ k\leqslant m-3}} A_{\alpha,\, m-k}(t, x)\,D^\alpha D_t^k\,u(t, x) = f(t, x), \tag{3}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)\in\Omega$; $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$; $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$; $D^\alpha =$

$= D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$; $D_k = i\partial / \partial x_k$ $(k = 1, \ldots, n)$; $D_t = \partial / \partial t$ с граничными условиями

$$C_k(x, D) u|_\Gamma = \sum_{|\alpha| \leqslant p_k} C_{\alpha k}(x) D^\alpha u(t, x)|_\Gamma = 0 \quad (p_k \leqslant 2p - 1; \ k = 1, \ldots, p) \tag{4}$$

и начальными условиями

$$u_t^{(k)}(0, x) = u_k(x) \quad (k = 0, \ldots, m - 1) \tag{5}$$

Предположим, что $A_\alpha(t, x) \in C^{1, |\alpha|}([0, T] \times \Omega)$ и $A(t, x, D) = \sum_{|\alpha| \leqslant 2p} A_\alpha(t, x) D^\alpha$ — формально самосопряженный положительно эллиптический оператор в $\overline{\Omega}$; $C_{\alpha k}(x) \in C^{2p - p_k}(\overline{\Omega})$; система граничных операторов $(C_k)_1^p$ нормальна; система $(C_k)_1^p$ связана с оператором $A(t, x, D)$ посредством условия Шапиро — Лопатинского ([5-6]), оператор $A(t)$, порожденный системой $(A(t, x, D), (C_k)_1^p)$ является самосопряженным в $L_2(\Omega)$ с областью определения $D(A(t)) = W_2^{2p}(\Omega, (C_k)_1^p)$; имеет место неравенство
$(A(t)u, u) \geqslant c_1 \|u\|_{W_2^p}^2 - c_2 \|u\|_{L_2}^2$ $(c_1 > 0, u \in W_2^{2p}(\Omega, (C_k)_1^p))$.

Следующая теорема вытекает из абстрактной теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть* $A_\alpha(t, x) \in C^{2, |\alpha|}([0, T] \times \overline{\Omega})$; $A(t, x)$, $B_\alpha(t, x)$, $A_{\alpha k}(t, x)$, $f(t, x) \in C^1([0, T]; L_2(\Omega))$; $u_k(x) \in W_2^{2p}(\Omega, (C_k)_1^p)$ $(k = 0, \ldots, m-1)$

Тогда задача (3) — (4) — (5) *имеет единственное решение* $u(t, x) \in C^m([0, T]; L_2(\Omega)) \cap C^{m-1}([0, T]; W_2^p(\Omega)) \bigcap_{k=0}^{m-2} C^k([0, T]; W_2^{2p}(\Omega))$,

и для него справедлива оценка

$$\|D_t^m u(t, x)\|_{L_2(\Omega)} + \|D_t^{m-1} u(t, x)\|_{W_2^p(\Omega)} + \sum_{k=0}^{m-2} \|D_t^k u(t, x)\|_{W_2^{2p}(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant c\Big[\|u_{m-1}(x)\|_{W_2^p(\Omega)} + \sum_{k=0}^{m-2} \|u_k(x)\|_{W_2^{2p}(\Omega)} + \max_{0 \leqslant \tau \leqslant t} (\|f(\tau, x)\|_{L_2(\Omega)} + \|D_\tau f(\tau, x)\|_{L_2(\Omega)})\Big].$$

Легко заметить, что уравнение типа Соболева ([7]) $D_t^2 \Delta u + D_z^2 u - a^2(D_t^4 u + D_t^2 u) = f$, $\alpha \neq 0$, принадлежит к классу уравнений вида (3) $(m = 4, A = -\frac{1}{a^2}\Delta u + I, A_4 = -\frac{1}{a^2} D_z^2)$. Смешанная задача для таких уравнений решалась в работе ([8]).

Вторая абстрактная теорема также дает некоторый выход для дифференциальных уравнений в частных производных. Рассмотрим уравнение

$$D_t^m u(t, x) + \sum_{|\alpha| \leqslant p} A_{\alpha 1}(t, x) D_t^{m-1} u(t, x) + \sum_{|\alpha| \leqslant 2p} A_\alpha(t, x) D^\alpha D_t^{m-2} u(t, x) +$$

$$+ \sum_{|\alpha| \leqslant p} A_{\alpha, m-k}(t, x) D^\alpha D_t^k u(t, x) = f. \tag{6}$$

Предположим, что $p_1 < \ldots < p_p$ и оператор $-A_1(t)$, порожденный системой $\left(-\sum_{|\alpha| \leqslant p} A_{\alpha 1}(t, x) D^\alpha, (C_k)_1^r\right)$, где $p_r \leqslant p - 1$; $p_{r+1} \geqslant p$, удовлетворяет условию диссипативности в $L_2(\Omega)$, т. е. $\operatorname{Re}(A_1(t)u, u) \geqslant \omega \|u\|_{L_2(\Omega)}^2$, при всех $u \in W_2^p(\Omega, (C_k)_1^r)$.

Теорема 4. *Пусть* $A_\alpha(t, x) \in C^{1, |\alpha|}([0, T] \times \overline{\Omega})$; $A_{\alpha k}(t, x)$, $f(t, x) \in C^1([0, T]; L_2(\Omega))$; $u_k(x) \in W_2^{2p}(\Omega, (C_k)_1^p)$. *Тогда задача* (6) — (4) — (5) *имеет единственное решение* $u(t, x) \in C^m([0, T]; L_2(\Omega)) \cap C^k([0, T];$

$W_2^p(\Omega)) \cap C^{m-2}([0, T]; W_2^{2p}(\Omega))$, и для него справедлива оценка

$$\|D_t^m u(t, x)\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{k=0}^{m-1} \|D_t^k u(t, x)\|_{W_2^p(\Omega)} + \|D_t^{m-2} u(t, x)\|_{W_2^{2p}(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant c \Big[\sum_{k=0}^{m-1} \|u_k(x)\|_{W_2^p(\Omega)} + \|u_{m-2}(x)\|_{W_2^{2p}(\Omega)} + \max_{0 \leqslant \tau \leqslant t} (\|f(\tau, x)\|_{L_2(\Omega)} + \|D_\tau f(\tau, x)\|_{L_2(\Omega)}) \Big].$$

Задача (6) — (4) — (5) при $m=2$, $A_{\alpha 1}(t, x) = 0$ и $C_k = \partial^k / \partial n^k$ исследована в работе ([9]), а при $m = 2$, $A_{\alpha 1}(t, x) = 0$, $A_\alpha(t, x) = A_\alpha(x)$ в работе ([10]).

Отметим, что рассмотренный нами класс уравнений (6) содержит как параболические уравнения $(D_t^2 - a^2 D_x^2 D_t + b^2 D_x^4 = 0)$, так и гиперболические уравнения $(D_t^2 + a D_x D_t - b^2 D_x^2 = 0)$.

Институт математики и механики
Академии наук АзербССР
Баку

Поступило
4 V 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] T. Kato, J. Math. Soc. Japan, 5, 2, 208 (1953). [2] J. Kizynski, Studia Math., 23 (1964). [3] С. Г. Крейн, Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, М., (1967). [4] С. Я. Якубов, Изв. высших учебн. завед., Матем., № 11 (1969). [5] З. Я. Шапиро, Изв. АН СССР, сер. Матем., 17, 6 (1953). [6] Я. Б. Лопатинский, Укр. матем. журн., № 5, 2 (1953). [7] С. Л. Соболев, Изв. АН СССР, сер. Матем., 18, 1 (1954). [8] В. Н. Масленникова, ДАН, 102, № 5 (1955). [9] О. А. Ладыженская, Матем. сборн., 45 (87), 2 (1958). [10] Н. И. Бриш, И. Н. Валешкевич, Дифферен. уравнения, 1, 3 (1965).