Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 6

УДК 519.95 + 517.11

КИБЕРНЕТИКА
И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

И. Н. АЙЗЕНБЕРГ, Ю. Л. ИВАСЬКИВ, Д. А. ПОСПЕЛОВ

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ПОРОГОВЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком В. М. Глушковым 22 VI 1970)

Применение аппарата двузначной пороговой логики позволило получить эффективное решение ряда задач в теории цифровых автоматов, распознавании образов, моделировании нервных сетей и других разделах кибернетики. Успехи, достигнутые в построении многозначных физических схем, делают целесообразной разработку многозначной пороговой логики.

Введем в рассмотрение k-значный структурный алфавит $Z_k = \{\varepsilon^0, \varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^{k-1}\}$, где ε^j — j-я степень первообразного корня $\sqrt[k]{1}$ в поле комплексных чисел $\varepsilon = e^{i\,2\pi/k}$, i-мнимая единица. Естественно, что при таком алфавите под функцией $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ k-значной логики подразумевается отображение $f: Z_k^n \to Z_k$, где Z_k^n — декартова n-я степень множества Z_k.

Введем обозначения: $x_1 = x_{1\underbrace{00\ldots0}_{n-1}}$, $x_2 = x_{01\underbrace{0\ldots0}_{n-2}}, \ldots,$ $x_n = x_{\underbrace{00\ldots0}_{n-1}1}$; $x_i^t =$

$$= x_{\underbrace{00\ldots0}_{i-1}t\underbrace{0\ldots0}_{n-i}};\ x_1x_2\ldots x_n = x_{\underbrace{11\ldots1}_{n}}.$$

Другими словами, символ $x_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ в дальнейшем будет обозначать произведение $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$, где некоторые α_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ могут принимать нулевые значения. Если каждый из таких символов рассматривать как некоторую функцию, заданную на мультипликативной абелевой группе G порядка k_n, элементами которой являются n-мерные векторы из Z_k^n с групповой операцией покомпонентного умножения векторов, то, очевидно, таких функций будет в точности k^n, и они будут исчерпывать группу $\chi(G)$ характеров рассматриваемой группы G.

Рассмотрим $k-1$ подмножеств множества $\chi(G)$:

$$\left.\begin{array}{l} x_{100\ldots0},\ x_{200\ldots0},\ \ldots,\ x_{(k-1)00\ldots0} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{00\ldots01},\ x_{00\ldots02},\ \ldots,\ x_{00\ldots0(k-1)} \end{array}\right\} \quad (1)$$

$$\vdots$$

$$\left.\begin{array}{l} x_{\underbrace{11\ldots1}_{k-1}0\ldots0},\ x_{222\ldots20\ldots0},\ \ldots,\ x_{(k-1)(k-1)\ldots(k-1)0\ldots0} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{00\ldots0\underbrace{11\ldots1}_{k-1}},\ x_{00\ldots0222\ldots2},\ \ldots,\ x_{00\ldots0(k-1)(k-1)\ldots(k-1)} \end{array}\right\}. \quad (k\text{-}1)$$

Из принятых обозначений и описания приведенных подмножеств видно, что первое из них имеет мощность $(k-1)C_n^1$, второе — $(k-1)C_n^2$, наконец, $(k-1)$-е — $(k-1)C_n^{k-1}$. Следовательно, общее количество рассматриваемых характеров равно $(k-1)(C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{k-1})$. Ясно, что в булевом случае, т. е. при $k = 2$, это количество равно $C_n^1 = n$.

Функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_{100\ldots0}, x_{010\ldots0}, \ldots, x_{000\ldots01})$ k-значной логики будем называть пороговой, если существует такой набор комплексных чисел

$$\left.\begin{array}{c} a_1,\ a_2, \ldots, a_{k-1}, \\ a_{100\ldots 0}, a_{200\ldots 0}, \ldots, a_{(k-1)00\ldots 0}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{000\ldots 01}, a_{000\ldots 02}, \ldots, a_{000\ldots 0(k-1)}; \end{array}\right\} \qquad (1')$$

$$\vdots$$

$$\left.\begin{array}{c} a_{111\ldots 10\ldots 0}, a_{222\ldots 20\ldots 0}, \ldots, a_{(k-1)(k-1)\ldots(k-1)0\ldots 0}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{00\ldots 011\ldots 1}, a_{00\ldots 0(k-1)(k-1)\ldots(k-1)}, \ldots, a_{00\ldots 0(k-1)(k-1)\ldots(k-1)}; \end{array}\right\} \qquad ((k-1)')$$

что для всех векторов $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in Z_k^n$ выполняется условие

$$\arg\left(a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \ldots + a_{k-1}\varepsilon^{k-1} + \sum a_{i_1i_2\ldots i_n}\alpha_{i_1i_2\ldots i_n}\right) = \\ = \arg f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \qquad (*)$$

где суммирование ведется по всем характерам из подмножеств (1), (2), ..., $(k-1)$ и всем коэффициентам из $(1')$, $(2')$, ..., $((k-1)')$, а $\alpha_{i_1i_2\ldots i_n}$ равно значению характера $x_{i_1i_2\ldots i_n}$ на наборе $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. В (*) $\arg z$ — аргумент комплексного числа z.

$(k-1)$-мерный вектор $(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1})$ по определению будем называть **порогом** (порогом можно называть также $A_1 = a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \ldots + a_{k-1}\varepsilon^{k-1}$).

Вектором структуры назовем $(k-1)[C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C^{k-1}]$-мерный вектор, компонентами которого являются $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$, а также все элементы из $(1')$, $(2')$, ..., $((k-1)')$. Обозначим этот вектор A. Существует ряд критериев, с помощью которых можно установить, является ли некоторая заданная функция пороговой с заданным вектором структуры. Примером является следующее очевидное, но вместе с тем важное для синтеза многозначных пороговых элементов утверждение.

Теорема 1. *Для того чтобы k-значная функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ была пороговой с вектором структуры A, необходимо и достаточно, чтобы для всех наборов $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ выполнялось условие*

$$a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \ldots + a_{k-1}\varepsilon^{k-1} + \sum a_{i_1i_2\ldots i_n}\alpha_{i_1i_2\ldots i_n} = \left|a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \ldots + a_{k-1}\varepsilon^{k-1} + \right. \\ \left. + \sum a_{i_1i_2\ldots i_n}\alpha_{i_1i_2\ldots i_n}\right| f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

На основе этой теоремы может быть построен алгоритм, который позволяет определить $|a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \ldots + a_{k-1}\varepsilon^{k-1} + \sum a_{i_1i_2\ldots i_n}\alpha_{i_1i_2\ldots i_n}| = r_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha}$ для всех $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и, таким образом, свести вопрос о нахождении вектора структуры A к нахождению положительных решений $(r_{\underbrace{00\ldots 0}_{n}}, r_{00\ldots 01}, r_{00\ldots 02}, \ldots, r_{(k-1)(k-1)\ldots(k-1)})$ системы линейных уравнений с неизвестными, пробегающими множество $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$, $(1')$, $(2')$, ..., $((k-1)')$.

Отметим, что при $k = 2$ для пороговой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ компоненты вектора A — веса и порог A_1 — окажутся вещественными, а из всех характеров в данное нами определение пороговой функции будут входить только характеры $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и, таким образом, введенное понятие пороговой функции будет эквивалентно классическому понятию двузначной пороговой функции, если при этом перейти от структурного алфавита $Z_2 = \{\varepsilon^0 = 1, \varepsilon^1 = -1\}$ к алфавиту $Z_2 = \{0, 1\}$ и от порога A_1 к порогу $T = (A_1 + a_{100\ldots 0} + a_{010\ldots 0} + \ldots + a_{00\ldots 01}) / 2$.

Наличие характеров из подмножеств (1), (2), ..., $(k-1)$ в определении пороговой функции является существенным, так как, во-первых, если бы в (*) под знаком суммы ограничиться только значениями характеров $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то такому определению при $k \neq 2$ удовлетворяли бы лишь некоторые функции, существенно зависящие не более чем от одной переменной. Во-вторых, множество таких пороговых функций не составляло бы полной системы, и, следовательно, отсутствовала бы возможность построения произвольных сетей на основе пороговых элементов, реализующих многозначные пороговые функции рассмотренного вида.

Наконец, учитывая потенциальные возможности приложения введенных многозначных пороговых функций в теории распознавания образов для характеристики разбиения на k классов, в определение многозначной пороговой функции включены все характеры, каждый из которых обладает тем свойством, что определяемое им разбиение * не может быть задано с помощью характера, не входящего в подмножества (1), (2), ..., $(k-1)$.

Пример. Пусть задана функция трехзначной логики

x_1	ε^0	ε^0	ε^0	ε^1	ε^1	ε^1	ε^2	ε^2	ε^2
x_2	ε^0	ε^1	ε^2	ε^0	ε^1	ε^2	ε^0	ε^1	ε^2
$f(x_1x_2)$	ε^2	ε^1	ε^0	ε	ε^0	ε^0	ε^0	ε^0	ε

Эта функция пороговая в смысле данного выше определения. Характеры, входящие в ее определение, следующие: x_{01}, x_{02}, x_{10}, x_{11}, x_{20}, x_{22}. В качестве порога может быть взят двухмерный вектор $(a_1, a_2) = (-{}^1/_3, -{}^2/_3)$, а в качестве значений весов значения $a_{01} = -(1 + 4\varepsilon^2) / 9$,

$$a_{02} = (\varepsilon - 1) / 9, \quad a_{10} = (4\varepsilon^2 - 1) / 9, \quad a_{11} = (1 - 4\varepsilon^2) / 9, \quad a_{20} = (\varepsilon - 1) / 9,$$
$$a_{22} = (10\varepsilon^2 + 2) / 9.$$

Процесс нахождения весов и вектора порога как и в классическом булевом случае сводится к нахождению положительного решения некоторой системы линейных неравенств с вещественными коэффициентами или, что

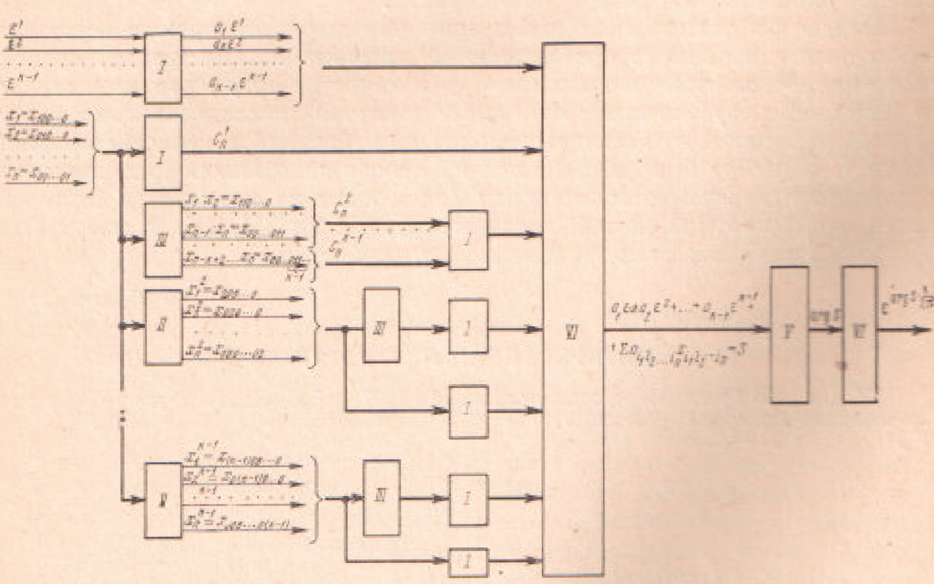

Рис. 1

эквивалентно этому, к нахождению положительного решения системы линейных однородных уравнений с неизвестными (в приведенном примере) r_{00}, r_{01}, r_{02}, r_{10}, r_{11}, r_{12}, r_{20}, r_{21}, r_{22}. Как видно из примера, веса и порог $A_1 = -{}^1/_3\varepsilon - {}^2/_3\varepsilon^2 = (2 + \varepsilon) / 3$ принадлежат полю $R(\varepsilon)$, где R — поле вещественных чисел. Отсюда также видно, что в булевом случае $R(\varepsilon) = R$, так как $\varepsilon = -1$.

---

* Под разбиением, определяемым характером, подразумеваются подмножества n-мерных векторов наборов из $Z_k{}^n$, каждое из которых (подмножеств) обладает тем свойством, что характер на всех векторах из этого подмножества принимает фиксированное значение ε^j $(j = 0, 1, \ldots, k-1)$.

Отметим, что можно дать ц е л ы й класс определений k-значной пороговой функции следующим образом. На всей комплексной плоскости z, за исключением нуля, определим функцию

$$\mathrm{sign}_\beta\, z = \varepsilon^j, \text{ если } \beta + \frac{2\pi j}{k} \leqslant \arg z < \beta + \frac{2\pi (j+1)}{k}, \quad j = 0, 1, \ldots, k-1,$$

β — фиксированное вещественное число из $[0, 2\pi)$. Тогда функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, осуществляющую отображение $f\colon Z_k^n \to Z_k$, назовем к о м п л е к с н о п о р о г о в о й с о т м е т к о й β, если существует такой набор (вектор структуры) комплексных чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n$, что $\forall (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in Z^n$ выполняется условие

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \mathrm{sign}_\beta (a_0 + a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n);$$

класс всех комплексно пороговых функций с отметкой β обозначим $\tilde{C}_\beta$.

Т е о р е м а 2. *При любых* $\beta, \gamma \quad (0 \leqslant \beta, \gamma < 2\pi)$

$$\tilde{C}_\beta = \tilde{C}_\gamma.$$

Т е о р е м а 3. *При* $k = 2$, *т. е. в обычном булевом случае, все классы* $\tilde{C}_\beta$ *для всех* $\beta \quad (0 \leqslant \beta < 2\pi)$ *совпадают с обычным классом булевых пороговых функций (с вещественными весами).*

Отметим, что применение теоремы 3 расширяет возможности инженерного моделирования булевых пороговых функций благодаря использованию весов, являющихся комплексными числами.

Структурно пороговый элемент, реализующий некоторую k-значную пороговую функцию (*), зависящую от n переменных, может быть представлен блок-схемой, приведенной на рис. 1.

Методы его технической реализации определяются прежде всего способом представления перерабатываемой информации. Например, при фазово-импульсном представлении, когда в качестве аргумента комплексного числа используется временной сдвиг некоторой последовательности импульсов относительно последовательности, выбранной в качестве опорной, блоки I, II могут быть выполнены на основе задерживающих элементов с управляемым временем задержки (типа схем на магнитных сердечниках с прямоугольной петлей гистерезиса). Блоки III, IV, V могут быть построены на основе схем типа дешифраторов.

Поступило
12 V 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Д е р т о у з о с. Пороговая логика, М., 1967. [2] Б. Л. В а н - д е р - В а р д е н, Современная алгебра, М.— Л., 1947.