Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 6

УДК 517. 751

МАТЕМАТИКА

А. Б. ГУЛИСАШВИЛИ

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ И ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 20 VII 1970)

В настоящей статье рассматриваются действительные функции, определенные на положительной полуоси. Пусть $\mathfrak{M}$ — класс измеримых функций, $\mathfrak{N}_1$ — класс функций, непрерывных справа, невозрастающих, интегрируемых на $(0, 1)$ и стремящихся к нулю при $x\to\infty$, $\mathfrak{N}_2$ — класс непрерывных выпуклых функций, принадлежащих $\mathfrak{N}_1$.

Для f из $\mathfrak{N}_1$ имеют смысл синус- и косинус-преобразования Фурье (см. ([1]), теорема 123):

$$F_s(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\sin xt\,dt,\qquad F_c(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos xt\,dt.$$

Функцией распределения неотрицательной функции h из $\mathfrak{M}$ называется функция, определенная на $(0, \infty)$ при помощи равенства $D(y;\,h)=\mu\{x: h(x)>y\}$, где μ — линейная мера Лебега.

Введем следующие обозначения: если $f\in\mathfrak{N}_1$, то $G(x)=\frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)$; если $f\in\mathfrak{N}_2$, то $H(x)=\int\limits_0^{x-1} t\,|f_+'(t)|\,dt$, где f_+' — правая производная функции f. Она существует в каждой точке, не убывает и непрерывна справа ([2]). Кроме того, f_+' неположительна, так как f не возрастает.

Интегральный класс $L_{\Psi,\Phi}$, где функция Φ непрерывна на $[0, \infty)$, не убывает, $\Phi(0)=0$, $\Phi(2u)=O(\Phi(u))$, а Ψ неотрицательна и измерима, определяется как подкласс $\mathfrak{M}$, состоящий из функций h, для которых $\int\limits_0^\infty \Psi(x)\Phi(|h(x)|)\,dx<\infty$. Если $\Psi(x)\equiv 1$, то используется обозначение L_Φ.

Основным результатом настоящей статьи является теорема об эквивалентности функций распределения преобразований F_s и G.

Теорема 1. *Существуют абсолютные положительные константы c_1, c_2 и c_3 такие, что для всех $f\in\mathfrak{N}_1$ и $y>0$*

$$D(y;\,c_1F_s)\leqslant D(y;\,G),\qquad D(y;\,c_2F_s)\geqslant c_3D(y;\,G).$$

Теорема 1 есть следствие более общего утверждения. Таким утверждением является

Теорема 2. *Пусть $f\in\mathfrak{N}_1$, $d_y=\sup\{x: G(x)>y\}$. Тогда*

а) $\{x: G(x)>y\}\subset(0,\,d_y)$; б) $\{x: {}^1\!/_7F_s(x)>y\}\subset(0,\,d_y)$;

в) $(d_y,\,2d_y)\subset\{x: 2G(x)>y\}$; г) $\mu\{x: 48F_s(x)>y\}\cap(d_y,\,4d_y)\geqslant{}^1\!/_{112}d_y$.

Доказательство теоремы 2. Равенство

$$F_s(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\frac{1-\cos xt}{x}\,d[-f(t)]\tag{1}$$

можно получить при помощи формулы интегрирования по частям, примененной к правой части (1).

Кроме того, известно ([1], стр. 25), что при $0 < a < b \leqslant \infty$, $x > 0$ и $f \in \mathfrak{N}_1$

$$\left|\int_a^b f(t)\sin xt\,dt\right| \leqslant \frac{2f(a)}{x}. \tag{2}$$

Докажем теперь два вспомогательных утверждения.

Лемма 1. *Пусть $f \in \mathfrak{N}_1$. Тогда для любого $a > 0$*

$$\left|\int_0^a f(t)\sin xt\,dt\right| \leqslant 3 \sup_{z \geqslant a^{-1}} G(z).$$

Доказательство. Если $a \leqslant x^{-1}$, то

$$\left|\int_0^a f(t)\sin xt\,dt\right| \leqslant xa \sup_{t \leqslant a} f(t)\,t \leqslant \sup_{z \geqslant a^{-1}} G(z).$$

Если $a > x^{-1}$, то, используя предыдущий случай и (2), получим

$$\left|\int_0^a f(t)\sin xt\,dt\right| \leqslant \left|\int_0^{x^{-1}} f(t)\sin xt\,dt\right| + \left|\int_{x^{-1}}^a f(t)\sin xt\,dt\right| \leqslant 3 \sup_{z \geqslant a^{-1}} G(z).$$

Лемма 2. *Пусть $h \in \mathfrak{M}$. Если действительные числа $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 1$, $\delta > 0$, $y > 0$ таковы, что при $x \geqslant \alpha$ $|h(x)| \leqslant \delta y$ и, кроме того,*

$$\frac{1}{\alpha}\int_\alpha^{\gamma\alpha} |h(x)|\,dx \geqslant \beta y,$$

то

$$\mu\left\{x : \frac{2(\gamma-1)}{\beta}|h(x)| > y\right\} \cap (\alpha, \gamma\alpha) \geqslant \frac{\beta}{2\delta}\alpha.$$

Доказательство. Обозначим $\mathscr{E} = \{x: 2(\gamma-1)\beta^{-1}|h(x)| > y\}$, $C\mathscr{E}$ — дополнение $\mathscr{E}$. Тогда, учитывая, что на $C\mathscr{E}$ $|h(x)| \leqslant 2^{-1}(\gamma-1)^{-1}\beta y$, и условия леммы 2, получим

$$\beta y \leqslant \frac{1}{\alpha}\int_\alpha^{\gamma\alpha} |h(x)|\,dx = \frac{1}{\alpha}\int_{\mathscr{E}\cap(\alpha,\gamma\alpha)} |h(x)|\,dx +$$

$$+ \frac{1}{\alpha}\int_{C\mathscr{E}\cap(\alpha,\gamma\alpha)} |h(x)|\,dx \leqslant \alpha^{-1}\delta y \mu\mathscr{E} \cap (\alpha, \gamma\alpha) + \alpha^{-1}(\gamma-1)\alpha 2^{-1}(\gamma-1)^{-1}\beta y =$$

$$= \alpha^{-1}\delta y \mu\mathscr{E} \cap (\alpha, \gamma\alpha) + 2^{-1}\beta y. \tag{3}$$

Из (3) следует заключение леммы 2.

Продолжим доказательство теоремы 2. Ясно, что а) следует из определения d_y. Если $d_y = 0$, то $G(x) \leqslant y$ на $(0, \infty)$ и из леммы 1 предельным переходом при $a \to \infty$ получим, что $F_s(x) \leqslant 3\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sup_{z>0} G(z) \leqslant 3\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,y$.

Если $d_y > 0$, то из леммы 1 и (2) вытекает, что

$$F_s(x) \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left|\int_0^{2^{-1}d_y^{-1}} f(t)\sin xt\,dt\right| + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left|\int_{2^{-1}d_y^{-1}}^\infty f(t)\sin xt\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant 3\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sup_{z \geqslant 2d_y} G(z) + 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{f(2^{-1}d_y^{-1})}{x}. \tag{4}$$

Предположим теперь, что $x \geqslant d_y$. Тогда из (4) следует, что $F_s(x) \leqslant 7 \sup\limits_{z d_y} G(z)$, и $F_s(x) \leqslant 7y$ согласно определению d_y. Следовательно, при $x \geqslant d_y$

$$F_s(x) \leqslant 7y, \tag{5}$$

и пункт б) теоремы 2 доказан. Далее, в) и г) травиальны, если $d_y = 0$. Если $d_y > 0$, то при $d_y < x < 2d_y$ $2G(x) = 2\frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right) > 2\frac{1}{2d_y} f\left(\frac{1}{d_y}\right) = G(d_y) \geqslant y$, так как f не возрастает, а G непрерывна слева. Отсюда следует справедливость в).

Согласно (1) и теореме о перемене порядка интегрирования для любого $u > 0$

$$\int\limits_u^{4u} F_s(x)\,dx \geqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_u^{4u} \frac{dx}{x} \int\limits_{u^{-1}}^{\infty} (1 - \cos xt)\, d[-f(t)] \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{u} \int\limits_{u^{-1}}^{\infty} d[-f(t)] \int\limits_u^{4u} (1 - \cos xt)\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi}} f\left(\frac{1}{u}\right) \geqslant \frac{1}{8} f\left(\frac{1}{u}\right). \tag{6}$$

Подставив в (6) вместо u d_y, и умножив обе части полученного неравенства на d_y^{-1}, мы заключаем, что

$$\frac{1}{d_y} \int\limits_{d_y}^{4d_y} F_s(x)\,dx \geqslant \frac{1}{8} G(d_y), \tag{7}$$

а так как $G(d_y) \geqslant y$, то из (7) следует, что

$$\frac{1}{d_y} \int\limits_{d_y}^{4d_y} F_s(x)\,dx \geqslant 1/8y. \tag{8}$$

Если мы к (5) и (8) применим лемму 2 с $h(x) = F_s(x)$, $\alpha = d_y$, $\beta = 1/8$, $\gamma = 4$, $\delta = 7$, то убедимся в справедливости пункта г). Теорема 2 доказана.

Замечание. В теореме 1 утверждается, что для $f \in \mathfrak{R}_1$ функции распределения F_s и G имеют один и тот же порядок на $(0, \infty)$. Если рассматривать не функции распределения, а сами функции F_s и G, то подобное утверждение неверно. Точнее, используя рассуждения из ([2], теор. 8), можно построить функцию $f \in \mathfrak{R}_1$ такую, что

$$\lim_{x \to 0} F_s(x)/G(x) = 0.$$

Приведем теперь формулировку теоремы, аналогичной теореме 1, для косинус-преобразования. Она доказывается методом, подобным примененному при доказательстве теоремы 1.

Теорема 3. *Существуют абсолютные положительные константы c_1', c_2' и c_3' такие, что для всех $f \in \mathfrak{R}_2$ и $y > 0$*

$$D(y; c_1' F_c) \leqslant D(y; H), \quad D(y; c_2' F_c) \geqslant c_3' D(y; H).$$

Из теорем 1, 2 и 3 можно вывести теорему об интегрируемости преобразований F_s и F_c.

Теорема 4. *Пусть $\Psi_1(x)$ неотрицательна на $(0, \infty)$, интегрируема на $(0, \varepsilon)$ для каждого $\varepsilon > 0$ и* $\int\limits_0^{\varepsilon} \Psi_1(x)\,dx = O(\Psi_1(\varepsilon)\,\varepsilon)$.

Пусть

$$\Psi_2(x)=\begin{cases}\Psi_1(x) & \textit{при } 0<x<1,\\ 0 & \textit{при } 1\leqslant x<\infty;\end{cases}\quad \Psi_3(x)=\begin{cases}0 & \textit{при } 0<x<1,\\ \Psi_1(x) & \textit{при } 1\leqslant x<\infty.\end{cases}$$

Тогда если $f\in\mathfrak{R}_1$, *то* $F_s\in L_{\Psi_i,\Phi}\Leftrightarrow G\in L_{\Psi_i,\Phi}$; *если* $f\in\mathfrak{R}_2$, *то* $F_c\in \in L_{\Psi_i,\Phi}\Leftrightarrow H\in L_{\Psi_i,\Phi}$ *для каждого* $i=1,2,3$.

Теорема 4 обобщает некоторые известные теоремы об интегрируемости F_s и F_c. Например, теорему Боаса (см. ([4]), § 9) для F_s, в которой $\Phi(u)= =u$, $\Psi(x)=x^{-\gamma}$, $0<\gamma<1$.

Относительно других теорем такого типа см. там же и в ([1]).

Из теоремы 1 следует, что справедлива

Теорема 5. *Если для некоторой функции* f *из* $\mathfrak{R}_1$ $F_s\in L_\Phi$, *то*

$$\lim_{y\to\infty}\int_0^\infty\Phi\left(\left|F_s(x)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^y f(t)\sin xt\,dt\right|\right)dx=0.$$

Аналогичным вопросам для рядов с монотонно убывающими коэффициентами посвящена наша заметка ([5]).

Тбилисский математический институт
им. А. М. Размадзе
Академии наук ГрузССР

Поступило
7 VII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, М., 1948. [2] М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий, Выпуклые функции и пространства Орлича, М., 1958. [3] А. И. Шмуклер, Матем. сборн., 72, в. 3 (1967). [4] R. P. Boas jr., Integrability Theorems for Trigonometric Transforms, Berlin, 1967. [5] А. Б. Гулисашвили, Сообщ. АН ГрузССР, 58, № 1 (1970).