Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 6

УДК 519.512 *МАТЕМАТИКА*

А. Г. ДРАГАЛИН, В. А. ЛЮБЕЦКИЙ, В. И. ФУКСОН

ОПРЕДЕЛИМЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СЧЕТНЫХ ОРДИНАЛОВ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 10 VII 1970)

В работе исследуются некоторые вопросы, относящиеся к эффективности в теории множеств. Основные проблемы такого сорта были поставлены довольно давно и интенсивно обсуждались, особенно в первый период развития теории множеств (см., например, [1, 2]), более новые работы [3, 4], где имеется дальнейшая литература). Нас специально будет интересовать следующая хорошо известная проблема эффективности: можно ли по данному счетному предельному ординалу α эффективно указать (с использованием, может быть, и других ординалов в качестве констант) последовательность меньших ординалов, сходящуюся к α? Или можно ли по данному счетному предельному ординалу α эффективно указать (с использованием, может быть, аналогичных констант) функцию, устанавливающую счетность α? Понятие эффективности носит метаматематический характер, поэтому точный ответ на поставленные вопросы, конечно, зависит от аксиоматической системы, использованной для теории множеств. Основной будет аксиоматическая система Цермело — Френкеля ZF с аксиомой выбора (аксиомы Iв, II — V, VII — IX из [5]). Термин «эффективно указать объект с такими-то свойствами» естественно уточняется тогда как «указать формулу ZF, определяющую этот объект и такую, что нужные свойства объекта выводятся в ZF. Несколько более удобно считать, что система ZF пополнена гильбертовскими ι-термами (например, по образцу [6]; хорошо известно, что такое пополнение не расширяет возможности системы ZF), в такой теории «эффективно указать объект» эквивалентным образом уточняется как «указать терм ZF», который, можно доказать в ZF, дает нужный ответ. Используя это уточнение, можно пытаться дать отрицательный ответ на некоторые нерешенные проблемы, связанные с эффективностью. Первые результаты такого рода получены Феферманом [7] и затем Леви [8] с помощью метода вынуждения Коэна [9].

В настоящей заметке мы даем отрицательный ответ на упомянутые проблемы, касающиеся счетных ординалов.

Теорема 1. *Если ZF непротиворечива, то невозможно определить терм $T(\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ теории, относительно которого в ZF можно было бы доказать, что для всякого счетного предельного α существуют ординалы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ такие, что $T(\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — монотонно возрастающая последовательность ординалов, сходящаяся к α.*

Таким образом, даже используя для каждого α в качестве констант ординалы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, невозможно эффективно определить последовательность (по типу ω_0) $T(\alpha)$, сходящуюся к α. Вторая из упомянутых проблем эффективным образом сводится к первой (если бы можно было эффективно отыскивать функцию, устанавливающую счетность α, то с помощью трансфинитной рекурсии можно было бы определить и терм T, указанный в теореме 1).

С другой стороны, хотя в ZF и нельзя назвать последовательности, сходящейся к α, любой отрезок ее можно назвать в некоторой модели ZF. Точнее, имеет место теорема 2 (см. ниже). Множество x назовем наследственно счетным, если x не более чем счетно, его элементы также не более чем счетны, элементы этих элементов не более чем счетны и т. д. Модель ZF мы назовем стандартной, если ε-отношение в модели является естественным отношением принадлежности между элементами модели, и транзитивной, если все элементы элементов модели сами являются элементами модели. Всюду далее под моделями ZF мы понимаем стандартные, транзитные модели.

Теорема 2. *Если предположить, что существует модель* ZF, *содержащая все наследственно счетные множества (это предположение выполняется, например, если предположить существование недостижимого кардинала), то всякое последственно счетное множество определимо в некоторой счетной модели* ZF.

Для приложения теоремы 2 остается заметить, что всякий начальный отрезок функции, выдающей по счетному ординалу сходящуюся к нему последовательность, есть наследственно счетное множество.

Ординалы в теории множеств мы определяем по фон Нейману ([5], стр. 129), отождествляя ординал с множеством предшествующих ему ординалов, так что каждый счетный ординал оказывается наследственно счетным множеством.

Наметим доказательство теоремы 1. Если ZF непротиворечива, то непротиворечиво и ее следующее расширение ZF^+: к синтаксису ZF добавляется константа П — новое множество, и каждая аксиома ZF, релятивизованная к П, добавляется как аксиома ZF^+. Кроме того, в качестве аксиом к ZF^+ добавляются формулы, утверждающие транзитивность и счетность П. В ZF^+ можно доказать существование минимальной модели M теории ZF, состоящей из конструктивных множеств. По этой модели методом Коэна строится модель N, а именно, модель ([9]), гл. IV, § 10, стр. 267, с такими параметрами, чтобы первый несчетный ординал ω_1^M модели M оказался счетным в N. Для N также верно утверждение, отмеченное Леви ([8], теорема 1) для другой модели, а именно, всякое наследственно ординально определимое множество конструктивно. (Для доказательства нашей теоремы достаточно установить этот факт для ординально определимых последовательностей счетных ординалов в N.) При перенесении доказательства Леви в модель существен аналог леммы 61 (([8]) стр. 149), который доказывается методом пермутаций аналогично ([7, 3]).

Допустим теперь, что указанный в теореме 1 терм $T(\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ существует. Обозначим через $(x \Rightarrow y)$ формулу ZF с переменными x и y, утверждающую, что x есть монотонно возрастающая последовательность ординалов, определенная на ω_0 и сходящаяся к предельному ординалу y. Пусть α — специальная переменная, пробегающая счетные ординалы. Тогда в ZF

$$\forall\alpha \quad \exists\alpha_1 \ldots \alpha_n \; (T(\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \Rightarrow \alpha).$$

Но тогда этот факт верен и в N. Выберем в качестве α первый несчетный ординал ω_1^M модели M (в N он счетен!). Для этого α найдутся ординалы $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n$ модели N такие, что $(T(\omega_1^M, \bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n) \Rightarrow \omega_1^M)$ верно в N. Пусть t есть множество N, задаваемое термом $T(\omega_1^M, \bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n)$ с указанными константами. Тогда $(t \Rightarrow \omega_1^M)$. По теореме Леви t конструктивно и, следовательно, $t \in M$. Формула же $(x \Rightarrow y)$ абсолютна, так что $(t \Rightarrow \omega_1^M)$, что невозможно, так как ω_1^M несчетно в M.

Наметим доказательство теоремы 2. Рассмотрим модель M, содержащую все наследственно счетные множества, и рассмотрим наследственно счетное множество x, $x \in M$. С помощью аргументов типа теоремы Левенгейма — Сколема можно построить уже счетную модель M^x и такую, что $x \in M^x$ и $g \in M^x$, где g — взаимно однозначное соответствие, устанавливающее наследственную счетность x (g определено на ω_0). Рассмотрим множество F пар натуральных чисел, такое что $\langle nk \rangle \in F \equiv g`n \in g`k$. Это множество эффективно кодируется множеством натуральных чисел G. Определим теперь функцию f: $f`n$ равно n-му по величине числу G. По теореме Истона [10] модель M^x может быть расширена до модели N таким образом, что в N $2^{\aleph_n} = \aleph_{f(n)}$. Тогда f эффективно определима в N (она выражает некоторые свойства кардиналов N), а, следовательно, в N эффективно определимо и множество x.

Авторы благодарят В. Н. Гришина за ценное обсуждение рассматриваемых вопросов.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
3 VII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] F. Bernstein, Leipz. Ber., **60** (1908). [2] Н. Н. Лузин, Лекции об аналитических множествах, М., стр. 359. [3] К. Куратовский, Топология, 1, М., 1966, стр. 594. [4] W. Sierpinski, Cardinal and Ordinal Numbers, Warszawa, 1958. [5] А. А. Френкель, И. Бар-Хиллел, Основания теории множеств, М., 1966, стр. 556. [6] J. B. Rosser, Logic for Mathematicians, 1953, p. 540. [7] S. Feferman, Fund. math., **56**, № 3, 325 (1965). [8] A. Levy, Intern. Congr. for Logic Methodology and Phil. Sci. 1964, Amsterdam, 1965, p. 127. [9] П. Дж. Коэн, Теория множеств и континуум-гипотеза, М., 1969. [10] W. Easton, Ann. Math. Log., 1, N 2, 139 (1970).