Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 6

УДК 513.813

МАТЕМАТИКА

А. И. ЕГОРОВ

О ДВИЖЕНИЯХ В ПРОСТРАНСТВАХ ОБЩЕЙ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

(Представлено академиком А. Д. Александровым 12 X 1970)

В последнее время усиленно развивается теория движений в римановых пространствах и в пространствах аффинной связности. Особый интерес представляет проблема определения лакун в распределении порядков полных групп движений и связанных с ними наиболее подвижных лакунарных пространств ([1]). В случае обычных пространств аффинной связности ненулевой кривизны порядок полных групп движений равняется точно n^2. Различные обобщения указанного результата позволяют подметить для известных типов дифференциально-геометрических пространств тенденцию понижения указанного порядка. Однако в настоящей статье мы показываем, что в пространствах ковекторной и контравекторной аффинной связности максимальный порядок групп движений равен точно n^2+1. Этот неожиданный результат позволяет поставить и полностью рассмотреть здесь также вопрос о максимальном порядке групп движений в пространствах линейных и гиперплоскостных элементов общей аффинной связности. Напомним прежде всего некоторые определения.

1. Пространством линейных элементов обобщенной аффинной связности называется многообразие $X_{2n-1}(x, \dot{x})$, в котором задано поле фундаментального геометрического объекта с компонентами Γ_{jk}^i, C_{jk}^i, преобразующимися при переходе от одной системы координат к другой по закону ([5])

$$C_{jk}^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} C_{jk}^i; \tag{1}$$

$$\Gamma_{jk}^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\left\{\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\Gamma_{jk}^i - \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{k'}\partial x^{l'}}\dot{x}^l\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^l}C_{jk}^i\right\}, \tag{2}$$

где $\dot{x}^i$ — псевдовектор, а C_{jk}^i, Γ_{jk}^i — тензор и объект минус первого и нулевого класса соответственно.

Пространством гиперплоскостных элементов обобщенной аффинной связности является, по определению, многообразие $X_{2n-1}(x, u)$, в котором компоненты поля фундаментального геометрического объекта Γ_{jk}^i, C_k^{ij} при переходе от одной системы координат к другой преобразуется по закону

$$C_k^{i'j'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} C_k^{ij}; \tag{3}$$

$$\Gamma_{jk}^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\left\{\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\Gamma_{jk}^i - \frac{\partial^2 x^q}{\partial x^{k'}\partial x^{p'}}u_q\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^p}C_j^{ip}\right\}, \tag{4}$$

где u_i — псевдоковектор, C_k^{ij}, Γ_{jk}^i — тензор и объект класса минус один и нуль соответственно.

Если тензорная часть объекта пространства линейных элементов обобщенной аффинной связности по определению удовлетворяет условию свертки, т. е.

$$C_{jk}^i\dot{x}^k = C_{jk}^i\dot{x}^j = 0, \tag{5}$$

а формулы преобразования координат (2) не содержат членов с тензором C_{jk}^i, то получим пространство линейных элементов аффинной связности.

Если условия (5) не выполняются, то пространство называется пространством линейных элементов общей аффинной связности. Пространство называется пространством контравекторных элементов общей аффинной связности, если условия свертки не удовлетворяются и $\dot{x}^i$ есть вектор.

Двойственные построения, примененные к фундаментальному объекту гиперплоскостных элементов, приводят нас к пространству гиперплоскостных и ковекторных элементов аффинной и общей аффинной связностей.

2. Установим сначала максимальный порядок групп движений в пространствах общей аффинной связности контравекторных элементов. Для того чтобы вектор инфинитезимального преобразования определял движение, необходимо и достаточно, чтобы производная Ли от фундаментального объекта равнялась нулю, т. е.

$$\mathcal{D}\Gamma^i_{jk} = 0, \quad \mathcal{D}C^i_{jk} = 0, \tag{6}$$

где $\mathcal{D}$ — знак лиевого дифференцирования вдоль линий тока векторного поля $v^i(x)$. Рассмотрим подробнее условия интегрируемости выписанных уравнений. Вводя дополнительно к $v^i(x)$ новые неизвестные функции $v_j^i = v_{,j}^i$, где запятая перед индексом j означает ковариантное дифференцирование в смысле связности Γ_{jk}^i, мы убеждаемся, что условия интегрируемости этих вспомогательных уравнений и уравнений (6) приводятся к следующему виду:

а) уравнение $\mathcal{D}C^i_{jk,l} = 0$ и все полученные из него ковариантным дифференцированием по x^p до порядка α под знаком $\mathcal{D}$;

б) уравнение $\mathcal{D}C^i_{jkl_1l_2\ldots l_s} = 0$ и все полученные из него последовательным ковариантным дифференцированием по x^p под знаком $\mathcal{D}$ до порядка β;

в) уравнение $\mathcal{D}R^{\ i}_{jkl} = 0$ и все полученные из него последовательным ковариантным дифференцированием по x^p до порядка γ под знаком $\mathcal{D}$.

г) уравнение $\mathcal{D}\Gamma^i_{jkl_1l_2\ldots l_t} = 0$ и все полученные из него последовательным ковариантным дифференцированием по x^p под знаком $\mathcal{D}$ до порядка δ.

Все полученные соотношения интегрируемости линейны и однородны относительно n^2+n неизвестных функций v^i, v_j^i. Если при увеличении каждого из чисел α, β, γ, δ, s, t на единицу число ρ связей не меняется, то пространство допускает группу движений порядка $r = n^2 + n - \rho$ ([6]).

Представим далее неизвестные v_j^i в виде

$$v^i_j = \sum_{a=1}^{p} w^a_j u^i_a, \tag{7}$$

где w_j^a — совокупность некоторого числа p линейно независимых ковекторов, u_a^i — система p контравекторов. Отметим также, что координаты вектора v^i бесконечно малого движения, оставляющего на месте данный элемент $(x, \dot{x})$, удовлетворяют в этой точке равенством $v^i(x) = v^i_j\dot{x}^j = 0$.

Рассмотрим подробнее условия интегрируемости а). Из уравнений инвариантности тензора C^i_{jkl} следует, что

$$C^i_{jkl} = \delta^i_j A_{kl} + \delta^i_k B_{jl} + \delta^i_l C_{jk} + \dot{x}^i C_{jkl},$$

если порядок групп движений $\mathfrak{G}_r$ удовлетворяет неравенству $r > n^2$. Условия инвариантности при движении полученных тензоров A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} показывают, что они необходимо равны нулю при условии, что порядок групп движений $r > n^2+1$. В самом деле, предполагая, например, тензор A_{ij} отличным от нуля, мы получим, что он симметрический и ранг его равен единице, т. е. $A_{ij} = \pm A_i A_j$. Затем из инвариантности при движениях тензора A_{ij} следует также инвариантность вектора $A_i \neq 0$, т. е. $\mathcal{D}A_i = 0$. В этом случае всегда можно выбрать одну из систем координат со свойствами

$$1)\ \dot{x}^i = \delta^i_{\alpha_1},\ A_i = \delta^{\alpha_1}_i, \quad 2)\ \dot{x}^i = \delta^i_{\alpha_1},\ A_i = \delta^{\alpha_2}_i \quad (\alpha_1 \neq \alpha_2).$$

Как в первом, так и во втором случаях уравнения $\mathcal{D}A_i = 0$ дают $n-1$ независимых отношений. Следовательно, порядок групп движений $r \leqslant \leqslant n^2+1$, что противоречит предположению $r > n^2+1$. Поэтому вектор A_i и тензор A_{ij} обращаются в нуль.

Так как, с другой стороны, пространство контравекторной аффинной связности

$$\Gamma^i_{jk} = 0, \quad C^1_{11} = 2\beta/\dot{x}^1, \quad C^2_{12} = \ldots = C^n_{1n} = (\alpha+\beta)/\dot{x}^1,$$
$$C^2_{21} = C^3_{31} = \ldots = C^n_{n1} = (\beta-\alpha)/\dot{x}^1,$$

остальные $C_{jk}{}^i$, $\Gamma_{jk}{}^i$ равны нулю, α, β — постоянные, допускает группу движений порядка $r = n^2+1$ с операторами

$$p_i, \quad x^i p_\alpha, \quad x^r p_1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha = 2, 3, \ldots, n;\ p_i = \partial/\partial x^i).$$

Таким образом мы приходим к следующему результату.

Теорема 1. *Максимальный порядок групп движений в пространствах контравекторных элементов общей аффинной связности равен точно* n^2+1.

Аналогичные (измененные по двойственности) рассуждения позволяют убедиться в справедливости максимального порядка $r = n^2+1$ групп движений в пространствах линейных и гиперплоскостных (ковекторных) элементов общей аффинной связности. Кстати отметим, что максимальный порядок групп движений в пространствах контравекторной аффинной связности, непосредственно предшествующий максимальному порядку n^2+1, равен точно n^2. В самом деле, пространство

$$^1/_2\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{21} = \ldots = \Gamma^n_{n1} = a, \quad ^1/_2 C^1_{11} = C^2_{12} = \ldots = C^n_{1n} = 1/\dot{x}^1 \quad (a \neq 0),$$

остальные $\Gamma_{jk}{}^i$, $C_{jk}{}^i$ равны нулю допускает полную группу движений порядка $r = n^2$.

3. Установим порядок полных групп движений максимально подвижных пространств линейных элементов аффинной связности. Представляя неизвестные $v_j{}^i$ по формулам (7), мы получим из условий интегрируемости тензорной части связности, что

$$C^i_{jk} = -\delta^i_j C_{pk}\dot{x}^p - \delta^i_k C_{jp}\dot{x}^p + \dot{x}^i C_{jk},$$

где тензор C_{ij} в правой части удовлетворяет условию свертки $C_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0$. Из условия инвариантности $\mathcal{D}C_{ij} = 0$ следует, что если порядок групп движений $r > n^2-n+2$, то этот тензор C_{ij} будет вида C_iC_j, причем координаты вектора C_i являются однородными степени -1 по опорному вектору $\dot{x}^i$. Условия интегрируемости вектора C_i позволяют заключить, что тензоры C_i, C_{ij}, $C_{ij}{}^h$ равны нулю. Таким образом, не существует пространств аффинной связности, допускающих группы движений порядка $r > n^2 - -n+2$. С другой стороны, пространство линейных элементов аффинной связности с

$$\Gamma^i_{jk} = 0,\ C^p_{p1} = -C^p_{1p} = -\dot{x}/(\dot{x}^1)^2,\ C^p_{p2} = -C^p_{2p} = 1/\dot{x}^1,$$
$$C^p_{12} = -C^p_{21} = \dot{x}^p/(\dot{x}^1)^2\,(p = 3, 4, \ldots, n),$$
$$\text{остальные } C_{jk}{}^i = 0$$

(по p не суммировать) допускает полную группу движений порядка $r = = n^2-n+2$ с операторами p_i, x^1p_2, $x^1p_1+x^2p_2$, x^ip_α $(i = 1, 2, \ldots, n;$ $\alpha = 3, 4, \ldots, n)$.

Теорема 2. *Максимальный порядок групп движений в пространствах линейных элементов аффинной связности равен точно* $n^2 - n + 2$.

Двойственные рассуждения приводят к максимальному порядку $r = n^2 - n + 2$ групп движений нетривиальных пространств гиперплоскостных элементов аффинной связности ([3]). В этом случае пространство

$$\Gamma^i_{jk} = 0,\ C^{1p}_p = -C^{p1}_p = -u_2/(u_1)^2,\ C^{2p}_p = -C^{p2}_p = 1/u_1,\ C^{12}_p = -C^{21}_p = u_p/(u_1)^2,$$

остальные $C_k{}^{ij} = 0$ допускает группу движений $\mathfrak{G}_r$ порядка $r = n^2 - n + 2$ с операторами $x^1p_1 + x^2p_2,\ x^2p_1,\ p_i,\ x^\alpha p_j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha = 3, 4, \ldots, n)$.

4. Аналогичные рассуждения позволяют установить наибольшие порядки полных групп движений в специальных пространствах аффинной связности. В случае пространств линейных (гиперплоскостных) элементов аффинной симметрической связности $C_{jk}{}^i = C_{kj}{}^i$ $(C_k{}^{ij} = C_k{}^{ji})$ имеет место

Теорема 3. *Максимальный порядок групп движений в пространствах линейных (гиперплоскостных) элементов аффинной симметрической связности равен точно* $n^2 - n + 1$.

В заключение отметим также, что если связность усеченная, т. е. $C_{jk}{}^i = 0$ $(C_k{}^{ij} = 0)$ и объект $\Gamma_{jk}{}^i$, симметрический по нижним индексам, то группы движений максимально подвижных пространств являются подгруппами порядка $n^2 - n + 1$ группы проективных преобразований n-мерного проективного пространства. В случае пространств с объектом $\Gamma^i_{jk} = \Gamma_{kj}{}^i$, $C_{jk}{}^i(x, \dot{x}) = 0$ мы приходим к результатам Т. Окубо ([4]).

Пензенский педагогический институт
им. В. Г. Белинского

Поступило
3 XII 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. П. Егоров, Итоги науки, Алгебра, топология, геометрия, 1965. [2] Б. Л. Лаптев, Уч. зап. Казанск. гос. унив., 109, кн. 4, 187 (1949). [3] А. П. Урбонас, Литовск. матем. сборн., 9, № 1, 153 (1969). [4] T. Okubo, On the order of the groups of affine collineations in the general spaces of Path, I, II, III, Tensor, 1956, N 3, p. 141; 1957, N 1, p. 1, 18. [5] В. И. Близникас, Литовск. матем. сборн., 6, № 2, 141 (1966).